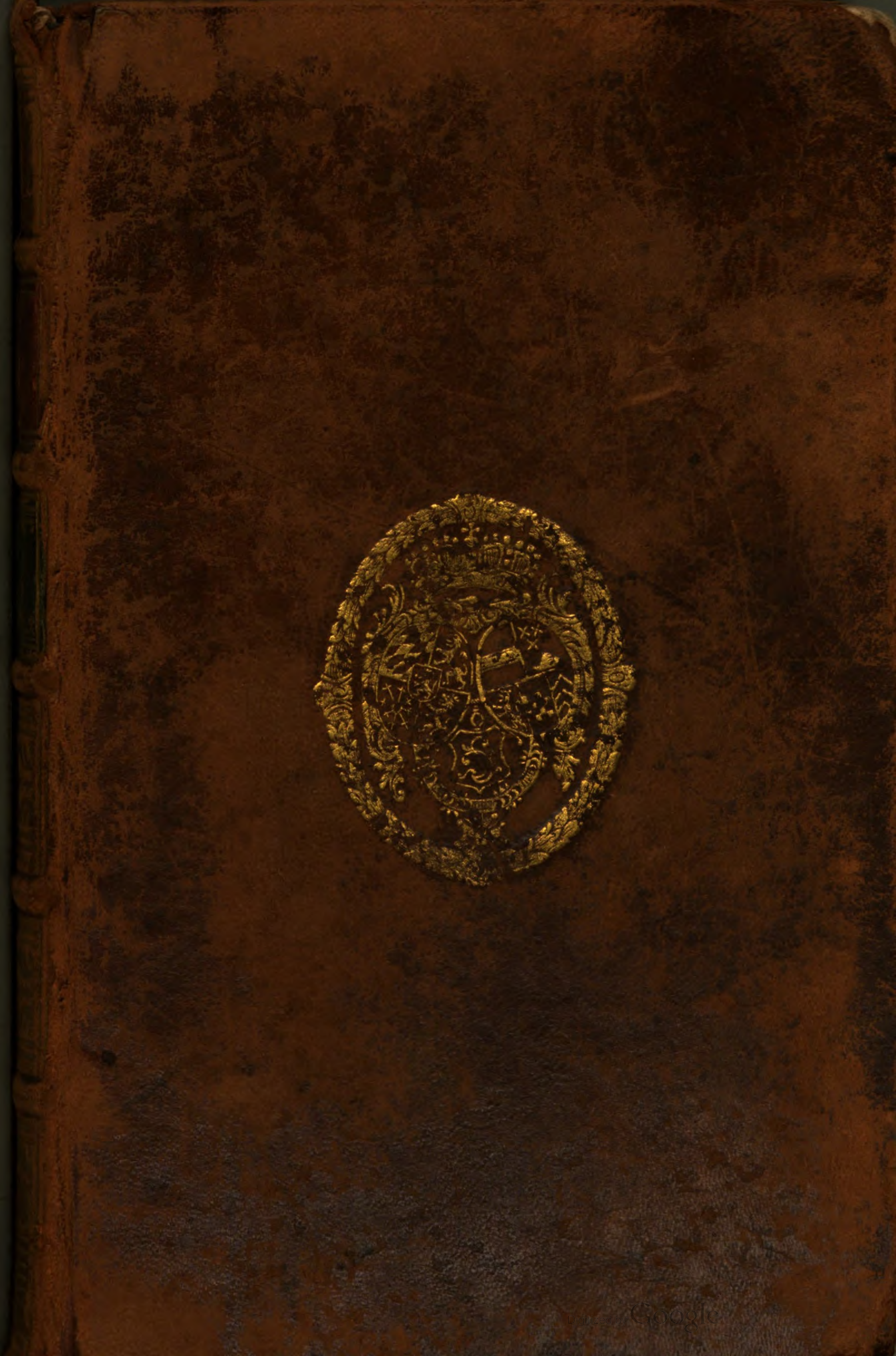
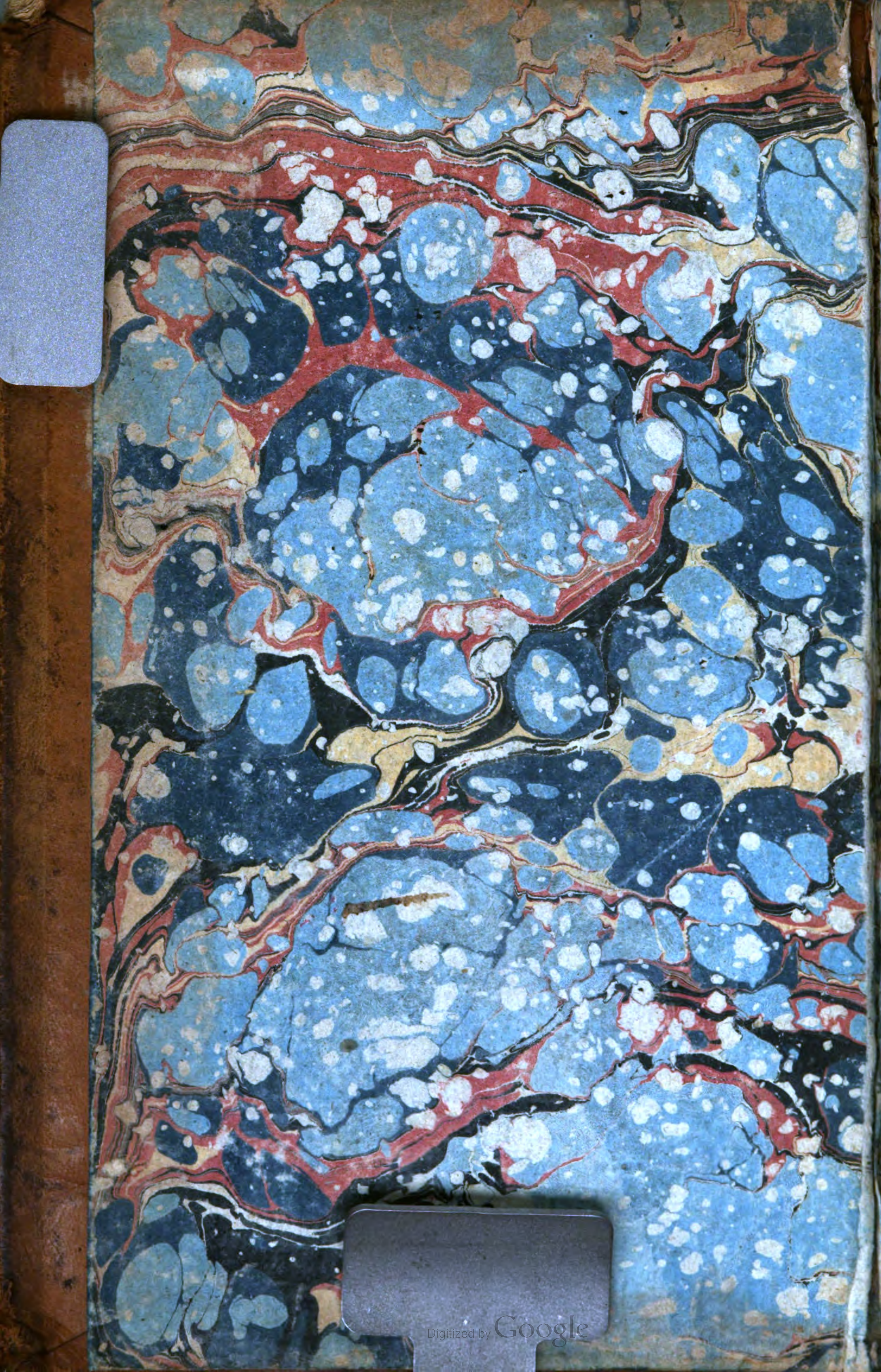






<36700040670017
<36700040670017
Bayer. Staatsbibliothek

Euler

Mathesis. Algebra generalis 226.

R

Leonhard Euler

vollständige

Anleitung

zur

Algebra.

1. u. 2.

Erster Theil

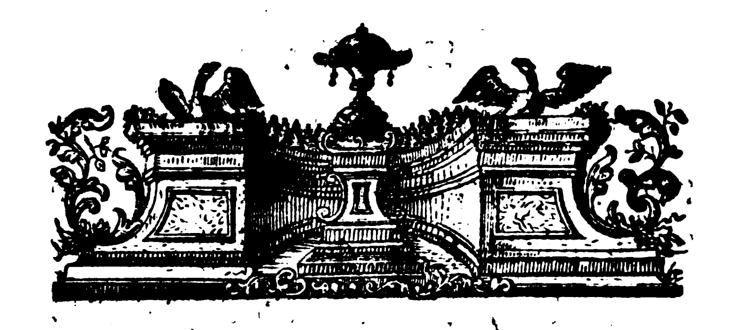
von den

verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen.

Mit Röm. Kayserl. und Churfürstl. Sächß. allergnädigsten Privilegiis.

St. Petersburg 1771.

bey der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften.



Vorbericht.

Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhern Rechenkunst ein Werk, davon schon vor zwey Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist.

Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhülfe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.

Der Verlust seines Gesichtes erweckte in ihm diesen Gedanken, und durch seinen stets geschäfftigen Geist angetrieben, säumete er nicht seinen Vorsatz ins Werk zu setzen. Zu diesem Ende erwählete er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonst aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwerks ein Schneider, und gehörete, was seine Fähigkeit anlanget, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagete, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurzer Zeit in den Stand gesetzet, die

die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben - Rechnungen ganz allein auszuführen und alle ihm vorgelegte algebraische Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.

Dieses preiset um so viel mehr den Vortrag und die Lehrart des gegenwärtigen Werks an; da der Lehrling der es geschrieben, begriffen und ausgeführet, sonst nicht die geringste Hülfe von irgend einem andern als seinem zwar berühmten, aber des Gesichts beraubten Lehrers, genossen.

Außer diesem für sich schon großen Vorzug werden die Kenner besonders die Lehre von den Logarithmen und ihre Verbindung mit den übrigen Rechnungsarten, so wie auch die für die Auflösung der cubischen und biqua-

 drati-

dratischen Gleichungen gegebenen Methoden mit Vergnügen lesen und bewundern. Die Liebhaber der diophanteischen Aufgaben aber werden sich über den letzten Abschnitt des zweyten Theils freuen, in welchem diese Aufgaben in einem angenehmen Zusammenhange vorgetragen, und alle zu ihrer Auflösung erforderliche Kunstgriffe erkläret worden sind.



Inhalt

Inhalt
des ganzen Werks.

Erster Theil.
Erster Abschnitt.
Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Cap. 6.

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Zweyter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Inhalt des zweyten Theils.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Zweyter

Zweyter Abschnitt.
Von der unbestimmten Analytic.

Des

Zweyter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytic.

Cap. 6.



Des

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von

den verschiedenen Rechnungsarten

mit einfachen Grössen.



Des
Ersten Theils
Erster Abschnitt.
Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Capitel I.
Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.

1.

Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genannt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Diesemnach ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Imgleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Theile der Mathematic, deren ein jeglicher mit einer besondern Art von Größen beschäfftiget ist, indem die Mathematic überhaupt nichts anders ist als eine Wissenschaft der Größen, und welche Mittel ausfündig macht, wie man dieselbe ausmessen soll.

3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß anzeiget, worinnen eine jegliche Größe, von eben der Art, gegen derselben steht.

Also, wenn die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, als z. E. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Ducaten und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel dergleichen Stücke in gemeldeter Summe Geldes enthalten sind.

Eben so, wenn die Größe eines Gewichts bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Gewicht, als z. E. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemessen werden, so pfleget man sich darzu einer gewissen bekannten Länge, welche ein Fuß genennet wird, zu bedienen.

4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen von allen Arten, kömmt es also darauf an, daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art

fest

fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird), und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach, daß man bestimme, in was für einem Verhältnisse die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darinn gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungsarten, so dabey vorkommen können, genau in Erwägung ziehe, und vollständig abhandele.

Dieser Grundtheil der Mathematic wird, die Analytic oder Algebra genennet.

6.

In der Analytic werden also bloß allein Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeiget werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu bekümmern, als welches in den übrigen Theilen der Mathematic geschieht.

7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die Arithmetic oder Rechenkunst, allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewisse Rechnungsarten, welche im gemeinen Leben öfters vorkommen; hingegen begreift die Analytic auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und derselben Berechnung auch immer vorfallen mag.

Capitel 2.

Erklärung der Zeichen + plus und − minus.

8.

Wenn zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch 5 + 3 angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man denn weiß, daß 8 heraus komme: eben so z. E. 12 + 7 ist 19; 25 + 16 ist 41, und 25 + 41 ist 66 rc.

9.

Durch dieses Zeichen + plus pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. E.

7 + 5 + 9, wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und über dieses noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus versteht man was nachstehende Formel bedeutet, als:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

nämlich die Summe aller dieser Zahlen, welche beträgt 51.

10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu merken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, rc. angedeutet werden, wenn man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn, als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedrückt werden.

In

In einem jeglichen Falle also, wenn man nur weiß, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.

11.

Wenn hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen − minus angedeutet, welches so viel als weniger ist, und derselben Zahl, welche weggenommen wird, vorgesetzt wird:

Also bedeutet 8 − 5,

daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da denn, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt. Eben so ist 12 − 7, so viel als 5, und 20 − 14, so viel als 6, ꝛc.

12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen sollen zugleich subtrahirt werden.

als z. E. 50 − 1 − 3 − 5 − 7 − 9.

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleibleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der vorgegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wenn man ihre Summe nämlich 25 auf einmal von 50 abzieht, da denn, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, in welchen beyde Zeichen + plus und − minus vorkommen; als z. E.

12 − 3 − 5 + 2 − 1 ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe derer Zahlen die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

12 + 2 machen 14, und davon die Summe aller Zahlen die − vor sich haben, welche sind 3, 5, 1,

das ist 9 abziehen, da denn, wie vorher gefunden wird 5.

14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man dieselben nach Belieben versetzen könne, wenn nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kann man setzen,

$$12 + 2 - 5 - 3 - 1, \text{ oder } 2 - 1 - 3 - 5 + 12,$$
$$\text{oder } 2 + 12 - 3 - 1 - 5;$$

wobey aber zu merken, daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß.

15.

Wenn nun die Sache allgemein zu machen, anstatt der wirklichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon, als z. E.

$a - b - c + d - e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückte Zahlen hergelegt werden, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen − haben insgesammt weggenommen werden müssen.

16.

Hier kömmt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pfleget man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen, als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen; diejeni-

diejenigen aber, welche das Zeichen – vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet.

17.

Dieses läßt sich schön durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person pflegt angezeigt zu werden; da dasjenige, was sie wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen + plus, dasjenige aber was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen – minus ausgedruckt wird. Also wann jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn

100 – 50. oder welches einerley,
+ 100 – 50. das ist 50.

18.

Da nun die negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positive Zahlen die wirkliche Besitzungen anzeigen, so kann man sagen, daß die negative Zahlen weniger sind als nichts; also wenn einer nichts im Vermögen hat, und noch darzu 50. Rub. schuldig ist, so hat er wirklich 50. Rub. weniger als nichts; dann wann ihm jemand 50. Rub. schenken sollte, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch jetzt mehr hatte als vorher.

19.

Wie nun die positive Zahlen ohnstreitig größer als nichts, so sind die negative Zahlen kleiner als nichts. Die positive Zahlen aber entstehen, wann man erstlich zu 0, oder nichts, immerfort eines zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nämlich.

0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,

und so fort ins unendliche.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

und so fort ohne Ende.

20.

Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Namen der ganzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind als nichts. Man nennt dieselbe ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und noch vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden wird, zu unterscheiden. Dann da zum Exempel 50 um ein ganzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß, zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, deren eine 50 Fuß, die andere aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreifen, daß man unendlich viel andere Linien ziehen kann, welche alle länger als 49 und doch kürzer als 50 Fuß sind.

21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so viel sorgfältiger zu bemerken, da derselbe in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird genung seyn zum voraus zu bemerken, daß diese Formel, z. E.

$$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4, \text{u. s. f.}$$

alle so viel sind als 0, oder nichts: ferner, daß z. E. $+2-5$ so viel ist als -3, weil, wenn einer 2 Rubl. hat, und 5 Rubl. schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rubl. schuldig: eben so ist,

$7 - 12$ so viel als -5

$25 - 40$ so viel als -15

22.

22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wenn auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da denn immer $+a-a$, so viel ist als 0, oder nichts. Hernach wenn man wissen will, was z. E. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwägen.

Der 1ste ist, wenn a größer als b, da subtrahiret man b von a, und der Rest positiv genommen, ist der gesuchte Werth.

Der 2te ist, wenn a kleiner als b, da subtrahiret man a von b, und der Rest negativ genommen, oder das Zeichen minus $-$ vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

Capitel 3.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

23.

Wenn zwey, oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken, also ist;

$a + a$ so viel als $2.\ a$, und
$a + a + a$ „ „ „ $3.\ a$, ferner
$a + a + a + a$ „ „ $4.\ a$, und so weiter.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, nämlich da

$2.\ a$ so viel ist, als 2 mal a, und
$3.\ a$ so viel als 3 mal a, ferner
$4.\ a$ so viel als 4 mal a, u. s. fort.

24.

Wenn also eine durch einen Buchstaben ausgedruckte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl bloß vor den Buchstaben geschrieben; also,

a mit 20 mult. giebt 20 a, und
b mit 30 mult. giebt 30 b, ꝛc.

Solchergestalt ist ein c, einmal genommen, oder 1 c, so viel als c.

25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multipliciret werden, als z. E.

2 mal 3 a macht 6 a
3 mal 4 b macht 12 b
5 mal 7 x macht 35 x,

welche noch ferner mit Zahlen nach Belieben können multipliciret werden.

26.

Wenn die Zahl, mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben vorgestellt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wenn b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product a b, und p q ist das Product, welches entsteht, wenn man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man p q noch ferner mit a multipliciren, so kömmt heraus a p q.

27.

Hiebey ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben ankomme, indem a b eben so viel ist als b a; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen,

nehmen, so giebt es sich von selbsten: nämlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

28.

Wenn anstatt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, wirkliche Zahlen sollen gesetzt werden, so sieht man leicht, daß dieselben alsdenn nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wenn man vor 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölf, sondern vier und dreyßig heißen. Wenn derowegen eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punct zwischen dieselben zu setzen: also

3. 4, bedeutet 3 mal 4, das ist 12, eben so ist 1. 2. so viel als 2. und 1. 2. 3, ist 6. ferner 1. 2. 3. 4. 56, ist 1344. und 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. ist 3628800 u. s. f.

29.

Hieraus ergiebt sich nun auch, was eine solche Formul 5. 7. 8. a b c d, bedeute; nämlich 5 wird erstlich mit 7 multipliciret, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d multipliciret; wobey zu merken, daß anstatt 5. 7. 8, der Werth davon, nämlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 ist 280, geschrieben werden kann.

30.

Ferner ist zu merken, daß solche Formel, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genennt werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factores zu nennen.

31.

Bis hierher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden

henden Producte nicht auch positive seyn sollten: nämlich $+a$ mit $+b$ multipliciret, giebt ohnstreitig $+ab$: was aber heraus komme, wenn $+a$ mit $-b$, oder $-a$ mit $-b$ multipliciret werde, erfordert eine besondere Erörterung.

32.

Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wenn diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn. Eben so, wenn $-a$ mit b, das ist, $+b$ multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen $-ba$, oder welches einerley $-ab$. Hieraus machen wir den Schluß, daß wenn eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher diese Regel gemacht wird, $+$ mit $+$ giebt $+$ oder plus; hingegen $+$ mit $-$, oder $-$ mit $+$ multipliciret, giebt $-$ oder minus.

33.

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich, wenn $-$ mit $-$ multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab: ob aber das Zeichen $+$ oder $-$ dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen $-$ seyn? Denn $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil heraus kommen, welches nämlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht diese Regel, $-$ mit $-$ mult. giebt $+$ eben so wohl, als $+$ mit $+$.

34.

Diese Regeln pflegen zusammen gezogen und kürzlich mit diesen Worten ausgedruckt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multipliciret, geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben −. Wenn also z. E. diese Zahlen,

+ a, − b, − c, + d, mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich + a mit − b, mult. − ab, dieses mit − c, giebt + abc, und dieses endlich mit + d, giebt + abcd.

35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen, wie zwey Zahlen, die schon selbst Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wenn die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product abcd, und entsteht also, wenn man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt. Oder also, wenn man z. E. die Zahl 36 mit 12 multipliciren soll: weil 12 ist 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36, erstlich mit 3 zu multipliciren, und das gefundene, nämlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren. Da man denn erhält:

432. welches so viel ist, als 12 mal 36.

36.

Wollte man aber 5 ab mit 3 cd multipliciren, so könnte man auch wohl setzen 3 cd 5 ab: da es aber hier eben nicht auf die Ordnung derer mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloße Zahlen zuerst zu setzen, und schreibt für das Product 5.3 abcd, oder 15 abcd, weil 5 mal 3 so viel ist als 15.

Eben so, wenn 12 pqr mit 7 xy, multiplicirt werden sollte, so erhält man 12. 7 pqrxy, oder 84 pqrxy.

Capitel

Capitel 4.

Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren.

37.

Wir haben bemerkt, daß ein Product aus 2 oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die Factores davon genennt.

Also sind die Factores des Products abcd die Zahlen a, b, c, d.

38.

Zieht man nun alle ganze Zahlen in Betrachtung, in so fern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen können, und also keine Factoren haben, andere aber aus 2 und auch mehr Zahlen mit einander mult. entstehen können, folglich 2 oder mehr Factores haben; also ist:

4 so viel als 2. 2, ferner 6 so viel als 2. 3, und 8 so viel als 2. 2. 2, ferner 27 so viel als 3. 3. 3, und 10 so viel als 2. 5, und so fort.

39.

Hingegen lassen sich die Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ꝛc. nicht solchergestalt durch Factores vorstellen, es wäre denn, daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. E. 2 durch 1. 2 vorstellen wollte. Allein, da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht unter die Factores gezählt.

Alle

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factores vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ꝛc. werden einfache Zahlen, oder Primzahlen genennt; die übrigen Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen lassen, als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ꝛc. heissen zusammengesetzte Zahlen.

40.

Die einfache oder Primzahlen verdienen also besonders wohl in Erwägung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey insonderheit dieses merkwürdig ist, daß, wenn dieselben der Ordnung nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, u. s. f. darinnen keine gewisse Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen.

Und es hat auch bisher kein Gesetze, nach welchem dieselben fortgiengen, ausfindig gemacht werden können.

41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen lassen, entspringen alle aus den obigen Primzahlen, so, daß alle Factores davon Primzahlen sind. Denn wenn je ein Factor keine Primzahl, sondern schon zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch 2 oder mehr Factores die Primzahlen wären, vorstellen können. Also, wenn die Zahl 30 durch 5. 6 vorgestellt wird, so ist 6 keine Primzahl, sondern 2. 3, und also kann 30 durch 5. 2. 3, oder durch 2. 3. 5, vorgestellt werden, wo alle Factores Primzahlen sind.

42.

Erwägt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Primzahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinnen ein großer Unterschied, indem einige nur 2 dergleichen Factores haben, andere 3 oder mehr: also ist, wie wir schon gesehen,

4 so viel als 2. 2,	6 so viel als 2. 3,
8 . . . . . 2. 2. 2,	9 . . . . . . 3. 3,
10 . . . . . . 2. 5,	12 . . . . . 2. 3. 2,
14 . . . . . 2. 7,	15 . . . . . 3. 5,
16 . . . 2. 2. 2. 2,	und so fort.

43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeglichen Zahl ihre einfache Factores finden soll.

Also, wenn die Zahl 360 vorgegeben wäre, so hat man für dieselbe erstlich 2. 180.

Nun aber ist

180 so viel als	2. 90	und
90 so viel als	2. 45	und
45 so viel als	3. 15	und endlich
15 so viel als	3. 5.	

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factores vorgestellt.

2. 2. 2. 3. 3. 5,

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt, die Zahl 360 vorbringen.

44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Primzahlen durch keine andere Zahlen theilen lassen, und hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfache Factores aufgelöset werden, wenn man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen lassen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel die Regeln erklärt werden sollen.

Capitel

Capitel 5.

Von der Division mit einfachen Größen.

45.

Wenn eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also, wenn die Zahl 12 in 3 gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewisser Namen. Die Zahl, die zertheilt werden soll, heißt das Dividend, oder die zu theilende Zahl: die Anzahl der Theile wird der Divisor, oder Theiler genennt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der Quotus oder Quotient genennt zu werden: also ist dem angeführten Exempel nach

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl.
3 der Divisor, oder Theiler, und
4 der Quotus, oder Quotient.

46.

Wenn man also eine Zahl durch 2 theilt, oder in 2 gleiche Theile zerschneidet, so muß ein solcher Theil, das ist, der Quotus zweymal genommen, just die vorgegebene Zahl ausmachen; eben so, wenn eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, so muß der Quotus 3 mal genommen dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend heraus kommen, wenn man den Quotus und den Divisor mit einander multiplicirt.

47.

Dahero wird auch die Division also beschrieben, daß man für den Quotient eine solche Zahl suche, welche mit dem Divisor multiplicirt, just die zu theilende Zahl hervor bringe. Also, wenn zum Exempel 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt, 35 heraus bringe. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7, 35 ausmacht. Man pflegt sich dabey dieser Redensart zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; denn 5 mal 7 ist 35.

48.

Man stellt sich demnach das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, da denn der andere Factor den Quotienten anzeigt.

Wenn ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7, und der andere also beschaffen ist, daß, wenn derselbe mit diese 7 multipliciret wird, genau 63 heraus kommen. Ein solches ist nun 7.9, und deswegen ist 9 der Quotus, welcher entspringt, wenn man 63 durch 7 dividirt.

49.

Wenn dahero auf eine allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotus offenbar b, weil a mit b multiplicirt, das Dividend ab ausmacht. Hieraus ist klar, daß, wenn man ab durch b dividiren soll, der Quotus a seyn werde.

Also überhaupt in allen Divisionsexempeln, wenn man das Dividend durch den Quotus dividirt, so muß der Divisor heraus kommen: als da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50.

Wie nun alles darauf ankömmt, daß man das Dividend durch 2 Factores vorstelle, deren einer dem Divisor gleich sey, weil alsdenn der andere den Quotus anzeigt, so wird man die folgenden Exempel leicht verstehen. Erstlich, das Dividend abc durch a dividirt, giebt bc, weil a mit bc multiplicirt, abc ausmacht: eben so, wenn abc durch b dividirt wird, so kommt ac heraus; und abc durch ac dividirt, giebt b. Hernach 12mn durch 3m dividirt, giebt 4n, weil 3m mit 4n multiplicirt 12mn ausmacht: wenn aber eben diese Zahl 12mn durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn heraus kommen.

51.

Weil eine jede Zahl a durch 1a, oder ein a, ausgedruckt werden kann, so ist hieraus offenbar, daß, wenn man a oder 1a durch 1 theilen soll, alsdenn eben dieselbe Zahl a für den Quotus heraus komme. Hingegen wenn eben dieselbe Zahl a oder 1a durch a getheilet werden soll, so wird der Quotus 1 seyn.

52.

Es geschiehet aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von 2 Factoren vorstellen könne, deren einer dem Divisor gleich sey, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerkstelligen. Denn, wenn ich z. E. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24, weil 7. 3 erst 21. und also zu wenig, hingegen 7. 4 schon 28, und also zu viel ausmacht: doch sieht man hieraus, daß der Quotus größer seyn müsse als 3, und doch kleiner als 4. Dahero um denselben genau zu bestimmen, eine andere Art von Zahlen, die Brüche genennt werden, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich, für den Quotus die nächst kleinere ganze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 habe ich 3 mal, der Rest aber sey 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, so um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, als:

6 | 34 | 5 nämlich der Divisor ist 6,
  | 30 | das Dividend ist 34,
4 der Quotient ist 5,
der Rest ist 4,

9 | 41 | 4 und hier ist der Divisor 6,
  | 36 | das Dividend 41,
5 der Quotient 4,
der Rest 5,

In solchen Exempeln, wo ein Rest übrig bleibt, ist folgende Regel zu merken.

54.

Erstlich, daß wenn man den Theiler mit dem Quotus multipliciret, und zum Product noch den Rest addirt, alsdenn das Dividend heraus kommen müsse; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Also in dem ersten der zwey letztern Exempel multiplicirt man, 6. 5 ist 30, dazu den Rest 4 addirt, kommt just das Dividend 34.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wenn man den Theiler 9 mit dem Quotus 4 multiplicirt, und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

55.

Letztlich ist hier auch noch nöthig, in Ansehung der Zeichen plus + und minus −, anzumerken, daß wenn

+ab

+ ab durch + a dividirt wird, der Quotus + b seyn werde, welches für sich klar ist.

Wenn aber + ab durch − a dividirt werden soll, so wird der Quotus − b seyn, weil − a mit − b mult. + ab ausmacht.

Wenn ferner das Dividend − ab heißt, und durch den Theiler + a dividirt werden soll, so wird der Quotus − b seyn, weil + a mit − b mult. − ab giebt, das ist das Dividend.

Soll endlich das Dividend − ab durch den Divisor − a getheilt werden, so wird der Quotus + b seyn, weil − a mit + b multiplicirt, − ab ausmacht.

56.

Es finden also in der Division für die Zeichen + und − eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemerket haben, nämlich:

+ durch + giebt +: + durch − giebt −: − durch + giebt −: − durch − giebt +;

oder kürzer, gleiche Zeichen geben plus, ungleiche aber minus.

57.

Wenn also 18 pq durch − 3 p dividiret werden soll, so wird der Quotient − 6 q seyn.

ferner: − 30 xy durch + 6 y dividirt, giebt − 5 x;

ferner: − 54 abc durch − 9 b div. giebt + 6 ac: weil − 9 b mit + 6 ac mult. − 6.9 abc, oder − 54 abc giebt: welches für die Division mit einfachen Größen genung seyn mag. Dahero wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemerket haben.

Capitel 6.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisores theilen lassen, andere aber nicht, so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemerken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich dadurch nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumerken; zu welchem Ende wir die Divisores,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, und so fort, betrachten wollen.

59.

Es sey erstlich der Divisor 2; die Zahlen also, welche sich dadurch theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.

welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesamt gerade Zahlen genennt.

Hingegen die übrigen Zahlen

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.

welche sich durch 2 nicht theilen lassen, ohne daß nicht 1, im Rest bliebe; werden ungerade Zahlen genennt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die gerade Zahlen. Die gerade Zahlen können nun alle in dieser allgemeinen Formel 2 a begriffen werden, weil, wenn man für a nach und nach alle Zahlen annimmt, als

als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f. daraus alle gerade Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in dieser Formel $2a + 1$ enthalten, weil $2a + 1$ um 1 größer ist als die gerade Zahl $2a$.

60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3, so sind alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.

welche durch diese Formel $3a$ vorgestellt werden können. Denn $3a$ durch 3 dividirt, giebt a zum Quotus, ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wenn man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1 oder 2 zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Die, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, u. s. f.

und sind in dieser Formel $3a + 1$ enthalten. Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, u. s. f.

welche alle in dieser Formel $3a + 2$, enthalten sind: also, daß alle Zahlen entweder in der Form $3a$, oder in dieser $3a + 1$, oder in dieser $3a + 2$, enthalten sind.

61.

Wenn ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende,

4, 8, 12, 16, 20, 24, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel $4a$ enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich durch 4 nicht theilen lassen, lassen entweder 1 zum Rest, und sind um 1 größer als jene, nämlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, u. s. f.

welche folglich in dieser Formel $4a + 1$ enthalten sind. Oder sie lassen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, solche Zahlen sind folgende:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u. s. f.

und sind in dieser Formel $4a + 3$ enthalten, so, daß alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln

$4a$, $4a+1$, $4a+2$, $4a+3$, enthalten sind.

62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, in der Formel $5a$ enthalten sind; diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen lassen, sind entweder:

$5a + 1$, $5a + 2$, $5a + 3$, oder $5a + 4$, und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63.

Hierbey kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfache Factores vorgebracht worden, weil eine jegliche Zahl, unter deren Factoren sich entweder:

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,

oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt: da zum Exempel

60 so viel ist als: 2. 2. 3. 5,

so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3 und auch durch 5 theilen lasse.

64.

Da hernach überhaupt die Formel abcd, sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner auch durch
abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch
abcd, das ist durch sich selbst, theilen läßt,

so läßt sich gleichfalls 60, das ist 2. 2. 3. 5, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwey Einfachen zusammengesetzt sind, nämlich durch

4, 6, 10, 15, ferner auch durch die, welche aus dreyen bestehen, als:

12, 20, 30, und endlich auch durch 60, das ist durch sich selbst.

65.

Wenn man also eine jegliche beliebige Zahl durch ihre einfache Factores vorgestellet hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Denn man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach, je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren bis man auf die vorgegebene Zahl selbst kömmt.

66.

Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich eine jede Zahl durch 1 theilen lasse, so wie sich auch eine jede Zahl durch sich selbst theilen läßt; also, daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisores hat, nämlich 1, und sich selbsten; welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern, keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben sind einfache oder Primzahlen genennet worden.

Alle zusammengesetzte Zahlen aber haben außer 1 und sich selbsten, noch andere Divisores, wie aus folgender

gender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler sind gesetzt worden.

Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Endlich ist noch zu merken das 0, als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil wenn man 0, durch eine jegliche Zahl als a theilen soll, der Quotus immer 0 ist, denn 0 mal a, oder 0 a ist 0: weil es wohl zu merken ist, daß eine jede Zahl mit 0 multiplicirt, nichts heraus bringe.

Capitel 7.

Von den Brüchen überhaupt.

68.

Wenn sich eine Zahl, als z. E. 7 durch eine andere als 3, nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, keineswegs aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskömmt, machen kann, ob gleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** genennet werden.

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus, und man pfleget denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die oben gesetzte Zahl 7 das Dividend und die unten gesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

70.

Wenn also auf eine allgemeine Art die Zahl a, durch die Zahl b, getheilet werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreibart ein Bruch genennet wird; dahero man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man saget, es werde dadurch der Quotus angezeiget, welcher entspringe, wenn man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu merken, daß bey allen dergleichen Brüchen, die untere Zahl der **Nenner**, die obere aber der **Zähler** genennet zu werden pfleget.

71. In

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel. $\frac{3}{4}$ drey Viertheil.
$\frac{3}{8}$ drey Achtel. $\frac{12}{100}$ zwölf Hunderttheil.

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennet, ein Halbes, anstatt ein Zweytel; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher herauskömmt, wenn man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da denn, wie bekannt ein solcher Theil ein Halbes genennet wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zähler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotus angedeutet wird, der heraus kömmt, wenn man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist, folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein Ganzes, daher sind folgende Brüche

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, u. s. f. alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kömmt weniger als 1 heraus; wenn z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil unstreitig kleiner

ner seyn, als ein Fuß, dahero offenbar, daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wenn hingegen der Zähler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruches größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nämlich ein Ganzes und noch ein Halbes. Eben so ist:

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel als $1\frac{2}{3}$;
weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12, und bekömmt 3 zum Quotus und 7 zum Reste, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche deren Zähler größer sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöset werden können, wovon das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zähler größer ist als der Nenner, unächte Brüche genennet, weil sie eins, oder mehr Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die ächten Brüche solche, deren Zähler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

76.

Man pfleget sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht

wenig

wenig erläutert wird: Wenn man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber besteht die Bedeutung des Bruches $\frac{1}{4}$ darinnen, daß, wenn man 1 in 4 gleiche Theile zertheilet, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wenn man daher solcher drey Theile zusammen nimmt, so erhält man den Werth des Bruches $\frac{3}{4}$.

Eben so kann man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als, $\frac{7}{12}$: wenn man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruches aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entsprungen. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilet werden müsse, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genennet.

Da aber die obere Zahl, nämlich 7, anzeiget, daß für den Werth des Bruches 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müssen, und also dieselbe gleichsam darzählet, so wird die obere Zahl der Zähler genennet.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ sind, wenn man weiß, was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$ u. s. f. Hierbey ist zu merken, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$; und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$, und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müsse. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneinet, denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilet, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gut Mikroscopium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen könnten zertheilet werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges, was wir verrichten können, oder von dem, was wirklich kann verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gänzlich zu nichts kömmt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die oben gesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann, so pfleget man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte,

wenn endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Denn das Wort unendlich will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, vorzustellen, so bedienet man sich dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemalen Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es lassen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeiget, wenn man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wissen wir schon, daß, wenn man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$, oder 0 wie wir gesehen haben, dividiret, alsdenn der Divisor, nämlich ∞ heraus komme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nämlich, daß dasselbe herauskomme, wenn man 1 durch 0, dividiret; folglich kann man mit Grunde sagen, daß 1 durch 0 dividiret eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

84.

Hier ist nöthig noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Wege zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich Großes könne weiter nicht vermehret

mehret werden. Dieses aber kann mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Denn da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2 mal größer werden könne.

Capitel 8.

Von den Eigenschaften der Brüche.

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jede dieser Brüche,

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, und so fort,

ein Ganzes ausmache, und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{12}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey ganze ausmacht: denn es giebt der Zähler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{18}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruches auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wenn man sowohl den Zähler als den Nenner eines Bruches mit eben derselben Zahl, so nach Belieben genommen werden kann, multipliciret, so behält

hält der Bruch immer eben denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}$, u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}$, u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{3}$. Ferner auch diese,

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}$, u. s. f.

einander gleich; weswegen auf eine allgemeine Art dieser Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten kann vorgestellet werden,

$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}$, und so ferner, davon ein jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

87.

Um dieses zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, dergestalt, daß c der Quotus sey, wenn man a durch b dividirt. Nun aber ist gezeiget worden, daß, wenn man den Quotus c mit dem Divisor b multiplicirt das Dividend heraus kommen müsse.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a geben, und c mit 3b multiplicirt wird 3a geben; und also überhaupt c mit mb multiplicirt muß ma geben.

Machet man hieraus wieder ein Divisionsexempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotus dem andern Factor gleich seyn:

seyn: nun aber giebt ma durch mb dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, dessen Werth folglich c ist. Weil aber c dem Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, was man für eine will.

88.

Da nun ein jeglicher Bruch durch unendlich viele Formen kann vorgestellet werden, von welchen eine jede eben denselben Werth enthält, so ist unstreitig, daß derjenige am leichtesten zu begreifen sey, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; als da anstatt $\frac{2}{3}$ ein jeder von folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so fort, nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl niemand zweifeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ dennoch am leichtesten unter allen zu begreifen sey. Hierbey kömmt nun diese Frage vor, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, als z. E. $\frac{8}{12}$, in seine kleinste Form, nämlich in $\frac{2}{3}$, bringen könne.

89.

Diese Frage wird leicht aufzulösen seyn, wenn man bedenket, daß ein jeder Bruch seinen Werth behalte, wenn so wohl sein Zähler als Nenner mit einerley Zahl multiplicirt wird. Denn daher erfolget, daß wenn man auch den Zähler und Nenner eines Bruches durch eben dieselbe Zahl dividirt, der Bruch immer eben denselben Werth behalte. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersehen. Denn wenn man sowohl den Zähler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividirt, so kömmt der Bruch $\frac{a}{b}$

 heraus,

heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon oben gezeiget worden.

90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, so muß man solche Zahlen finden können, wodurch sich sowohl der Zähler, als der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird ein gemeiner Theiler genennt, und so lange man zwischen dem Zähler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kann, so lange läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wenn aber kein gemeiner Theiler außer 1 weiter statt findet, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91.

Um dieses zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man so gleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, als woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beyde lassen sich nun noch einmal durch 2 theilen, und giebt die Theilung folgenden Bruch $\frac{12}{30}$, wo 2 abermal ein gemeiner Theiler ist, und $\frac{6}{15}$ heraus kommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zähler und Nenner noch durch 3 theilen lasse, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinen Theiler haben außer 1, wodurch aber die Zahlen nicht kleiner werden.

92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß wenn man so wohl den Zähler als Nenner mit eben der Zahl entweder multiplicirt oder dividiret, der Werth des Bruchs unverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit, und wird gemeiniglich darauf die ganze Lehre von den Brüchen gegründet. Es lassen sich z. E. zwey Brüche nicht

nicht wohl zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

93.

Hier wollen wir nur noch bemerken, daß auch alle ganze Zahlen in Form eines Bruchs vorgestellt werden können. Also ist z. E. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen:

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{u. s. f.}$$

welche alle eben denselben Werth, nämlich 6, in sich haben.

Capitel 9.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

94.

Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so hat es keine Schwierigkeit, dieselben zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall verrichtet man die Addition und Subtraction bloß allein an den Zählern, und schreibt den gemeinen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$:
$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ ist so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$:
$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ ist so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$:

eben so auch $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein ganzes, und $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$, das ist nichts, oder 0.

95.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es allezeit möglich, dieselben in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn diese Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind, und zusammen addirt werden sollen, so ist zu erwägen, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: wir haben also anstatt der vorigen diese Brüche, $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, welche geben $\frac{5}{6}$. Ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ist wie das obige, nur daß das Zeichen minus darzwischen steht, also $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seyen ferner gegeben diese Brüche $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$. Weil hier $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wenn man fragt, wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, so kommt $\frac{7}{12}$.

96.

Wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, welche zu gleichen Nennern gebracht werden sollen, so kommt alles darauf an, daß man eine Zahl finde, welche sich durch alle diese Nenner theilen lasse. Eine solche ist nun 60, welche den gemeinen Nenner abgiebt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, anstatt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, anstatt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, anstatt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, anstatt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollen nun diese Brüche $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}$, zusammen addirt werden, so machen die Zähler derselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 ganze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

97.

Es kommt hier alles darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf

eine

eine allgemeine Art zu verrichten, so seyen die vorgegebene Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist als $\frac{a}{b}$; Den andern Bruch multiplicire man, wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$, und sind also die Nenner jetzt gleich; die Summe aber derselben ist $\frac{ad+bc}{bd}$ und ihre Differenz ist $\frac{ad-bc}{bd}$. Wenn also diese Brüche vorgelegt sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summe $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ macht.

98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer oder kleiner sey als der andere? Z.E. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche zu gleichen Nennern bringen, und da bekommt man für den erstern $\frac{14}{21}$, und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus offenbar ist, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wenn ferner diese zwey Brüche gegeben sind $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet, daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

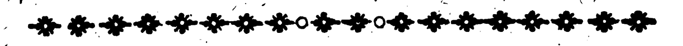
99.

Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll, als $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man denn so gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, bleibt $\frac{7}{12}$. Soll

man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da denn 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Uebrigens ist bekannt, daß wenn ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man denselben nur schlechthin davor schreibe; als, $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Ganzes ausmachen, welches sodann bemerkt werden muß: als $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so, wenn mehrere ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche, und wenn ihre Summe 1 oder mehr ganze enthält, so werden dieselben hernach mit den ganzen Zahlen addirt, z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren; so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Ganzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.



Capitel 10.

Von der Multiplication und Division.

101.

Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Ganzes
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wenn man entweder

der den Zähler damit multiplicirt, oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wenn es angeht, die Rechnung abkürzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; lasse ich aber den Zähler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{11}{24}$ mit 6 multiplicirt, giebt $\frac{11}{4}$ oder 3 $\frac{1}{4}$.

102.

Ueberhaupt also, wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu merken, daß wenn die ganze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdenn das Product dem Zähler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen, giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b, multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; denn da $\frac{a}{b}$ den Quotus ausdruckt, wenn das Dividend a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt, das Dividend geben müsse, so ist klar, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt, die Zahl a geben müsse.

103.

Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire; so müssen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß, wenn ich den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so, wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ heraus kommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen müsse, da denn der Nenner ohnverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$, und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wenn sich nur der Zähler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: wenn aber dieses nicht angeht, so ist zu bemerken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lasse. Also, wenn $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wenn es durch 2 dividirt wird, $\frac{3}{8}$.

Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandele man denselben, in diesen $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler ac durch c dividirt, a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105.

105.

Hieraus ersehen wir, daß, wenn ein Bruch, als $\frac{a}{b}$ durch eine ganze Zahl c dividiret werden soll, man nur nöthig habe, den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren, und den Zähler unverändert zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividiret, giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt, giebt $\frac{9}{80}$. Wenn sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mal 3 ist 9, und 3 mal 16 ist 48.

106.

Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also hat man nur nöthig, den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ heraus kommt; hernach durch d zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt: und hieraus entspringt diese Regel, daß um zwey Brüche mit einander zu multipliciren, man nur nöthig habe, erstlich die Zähler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

107.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobey erstlich zu merken, daß wenn die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zählern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so vielmal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3mal. Dahero wenn $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 durch 9 dividiren, das giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weiß man, wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo denn eben so viel heraus kommen muß, als wenn man den erstern Zähler ad durch den letztern bc dividiret: Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regel: man muß den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wenn also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so bekommt man nach dieser Regel $\frac{15}{16}$ zum Quotient: Wenn ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so bekommt man

man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner, wenn durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110.

Man pflegt diese Regel für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen. Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesen umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist, mit 2 multiplicirt: und durch $\frac{1}{3}$ dividirt, ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist, mit 3 multiplicirt.

111.

Wenn dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt, giebt 3000. Wenn ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus man begreifen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müsse, weil, wenn man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividirt, die große Zahl 1000000000 heraus kommt.

112.

Wenn ein Bruch durch sich selbst dividirt werden soll, so versteht sich von selbst, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl, durch sich selbst dividirt,

1 giebt:

1 giebt: eben dieses weiset auch unsere Regel: als wenn z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da denn kommt $\frac{12}{12}$, das ist, 1. Und wenn $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, da denn $\frac{ab}{ab}$, das ist 1 herauskommt.

113.

Es ist noch übrig, eine Redensart zu erklären, welche öfters gebraucht wird: z. E. man fragt, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da denn kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu merken, so oft diese Redensart vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und − eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.



Capitel II.

Von den Quadratzahlen.

115.

Wenn eine Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product ein Quadrat genennet, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine Quadratwurzel genennt wird.

Also,

Also, wenn man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadratzahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadratzahlen durch die Multiplication gefunden, wenn man nämlich die Wurzel mit sich selbst multipliciret.

Also, weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadratwurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadratwurzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestellt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Bey dieser der Ordnung nach fortschreitenden Quadratzahlen bemerken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß wenn man eine jede von der folgenden subtrahirt, die Reste in folgender Ordnung fortgehen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, rc.

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wenn man nämlich einen Bruch mit sich selbst multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$.

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$,
von $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{16}$, und so ferner.

Man darf nämlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$, und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wenn man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einen einzelnen Bruch bringen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so, um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. E. die Quadraten, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadr.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also, wenn die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden

den $\frac{289}{144}$, welches ist $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

Auf eine allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel 2a ist das Quadrat 4aa. Hieraus sieht man, daß wenn die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel 3a das Quadrat 9aa, und von der Wurzel 4a ist das Quadrat 16aa und so weiter. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat aabb, und wenn abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat aabbcc.

121.

Wenn daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wenn das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also, da 2304 so viel ist, als 4. 16. 36, so ist die Quadratwurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen plus und minus erwägen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine Positivzahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positivzahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + aa. Wenn aber die Wurzel eine Negativzahl ist, als − a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so, als wenn die Wurzel + a wäre;

folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als von − a; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadratwurzeln angegeben werden, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl + 5, als − 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch − 5 mit − 5 multiplicirt + 25 giebt.

Capitel 12.

Von den Quadratwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadratwurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4, u. s. w. wobey zu merken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadratwurzel so wohl + 5, als − 5, weil − 5 mit − 5 multiplicirt, eben so wohl + 25 ausmacht, als + 5 mit + 5 multiplicirt.

124.

Wenn daher die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist, und man die Quadratzahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht, die Quadratwurzeln zu finden: als, wenn die vorgegebene Zahl 196 wäre, so weiß man, daß die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-

dratwurzel sey $\frac{5}{7}$, weil man nur so wohl von dem Zähler, als von dem Nenner die Quadratwurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl als $12\frac{1}{4}$, so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nämlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadratwurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadratwurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wenn aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist auch nicht möglich, die Quadratwurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wissen wir doch, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als 3, weil 3.3 nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil 4.4 schon 16 macht; wir wissen so gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müsse, als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, denn $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$, und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können so gar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadratwurzel von 12, so möchte man denken, daß, wenn man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas weniges kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil

$\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$, und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einen Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht, giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist, und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesen Nenner gebracht, bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich aber leicht begreifen, daß, was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzu setzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich fassen müsse, und also niemals genau 12 betragen könne. Also, ungeachtet wir wissen, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$, doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so müssen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey, zwischen diesen zwey Brüchen, einen solchen ausfündig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadratwurzel von 12 an und für sich selbst unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ungeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

Hiedurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken lassen, und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadratwurzel aus der

Zahl

Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun Irrationalzahlen genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadratwurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, genau 2 hervor bringt, eine Irrationalzahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen Surdische genennt zu werden.

129.

Ungeachtet sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch vorstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn z. E. die Quadratwurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wissen wir doch, daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt, just 12 hervor bringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit, da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen können.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, so bedienet man sich eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur $\sqrt{}$, und wird mit dem Wort Quadratwurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbst multiplicirt, 12 giebt, oder die Quadratwurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2: $\sqrt{3}$ die Quadratwurzel aus 3: ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadratwurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, deutet die Qua-

dratwurzel aus der Zahl a an. So oft man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadratwurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obgemeldete Begriff von diesen Irrationalzahlen führt uns so gleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nämlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multiplicirt, 2 geben muß, so wissen wir, daß, wenn $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 heraus komme: eben so, $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt, giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, giebt a.

132.

Wenn aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß, wenn ein Quadrat Factores hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadratwurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadratwurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadratwurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet so gleich, daß, wenn b dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat ist von a.

133.

Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$; wobey es sich zutragen kann,

daß

daß im Quotus die Irrationalität verschwinde. Also, wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$: Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$, und die Quadratwurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wenn die Zahl, vor welche das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$: das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbst weg.

135.

Es ist auch leicht, solche Irrationalzahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multiplicieren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$, und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt, giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, folgende Form, nämlich $\sqrt{18}$. Also, daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadratwurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesetzt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Diesemnach werden folgende Reductionen klar seyn.

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2.4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, oder $\sqrt{3.4}$, — — — $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, oder $\sqrt{2.9}$, — — — $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6.4}$, — — — $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, oder $\sqrt{2.16}$, — — — $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, oder $\sqrt{3.25}$, — — — $5\sqrt{3}$. und so fort.

136.

Mit der Division hat es eben die Bewandniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3.

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$.

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6.4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

137.

Bey der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemerken vor, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu merken, daß, zum Unterschiede dieser sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, sowohl Ganze als Brüche, Rationalzahlen genennet zu werden pflegen.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

Capitel 13.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten sowohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus herauskommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben sowohl $+aa$ giebt, als wenn man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wenn es sich daher zuträgt, daß aus einer Negativzahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativzahl wäre. Denn wenn man z. E. die Quadratwürzel von der Zahl -4 verlanget, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder $+2$ noch -2, indem sowohl $+2$ als -2, mit sich selbst multiplicirt allemal $+4$ giebt, und nicht -4.

141.

Hieraus erkennet man also, daß die Quadratwurzel von einer Negativzahl weder eine Positiv- noch Negativzahl seyn könne, weil auch von allen Negativzahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen $+$ bekommen; folglich muß die verlangte Würzel von einer

ganz

ganz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativzahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerket worden, daß die Positivzahlen alle größer sind, als nichts, oder o: Die Negativzahlen hingegen alle kleiner sind, als nichts, oder o; also, daß alles, was größer ist, als nichts, durch Positivzahlen; alles aber, was kleiner ist, als nichts, durch Negativzahlen ausgedrücket wird: So sehen wir, daß die Quadratwurzeln aus Negativzahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil o mit o multiplicirt o, und also keine Negativzahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als o, oder etwa o selbst; so ist klar, daß die Quadratwurzel von Negativzahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: Folglich müssen wir sagen, daß dieselben unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gemeiniglich imaginäre Zahlen, oder eingebildete Zahlen genennet werden, weil sie bloß allein in der Einbildung statt finden.

144.

Daher bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, ꝛc. solche unmögliche oder Imaginärezahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativzahlen angezeiget werden.

Von diesen behauptet man also mit allem Rechte, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht

nicht einmal nichts selbst, als aus welchem Grunde sie folglich für unmöglich gehalten werden müssen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstande dargestellet, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genennet werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt zum Producte -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen unmöglichen Zahlen, als z. E. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darinn, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskömmt, wenn $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$, mult. -1. Und überhaupt, wenn man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$, multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadratwurzel aus einem Product gefunden wird, wenn man die Quadratwurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt, oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses Unmögliche, welches darinn vorkömmt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel, als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel,

als

als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel, als $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel, als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man, daß zwey unmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.

Wenn aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$, multiplicirt wird, so bekömmt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Denn da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$: Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$, das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 so viel ist, als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerkung allezeit statt findet, daß die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder sowohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\sqrt{4}$, sowohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a sowohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$, geschrieben werden kann, so gilt dieses auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$, ist sowohl $+\sqrt{-a}$ als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen + und −, welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen so hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151. End-

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen, und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun die Auflösung derselben auf solche unmögliche Zahlen führet, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache; Wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$, welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennet man, daß diese Frage unmöglich könne aufgelöset werden. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

Capitel 14.

Von den Cubiczahlen.

152.

Wenn eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmals mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein Cubus oder eine Cubiczahl genennet. Also ist von der Zahl a, der Cubus aaa, welcher entsteht, wenn die Zahl a mit sich

sich selbst, nämlich mit a, und das Quadrat derselben aa, nochmals mit der Zahl a, multiplicirt wird.

Also sind die Cubi von den natürlichen Zahlen folgende,

Zahlen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubus	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

153.

Wenn wir bey diesen Cubiczahlen ihre Differenzen, wie bey den Quadratzahlen geschehen, in Betrachtung ziehen, indem wir eine jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Reihe von Zahlen, wobey wir noch keine Ordnung bemerken,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wenn wir aber von denselben noch ferner die Differenzen nehmen, so erhalten wir folgende Reihe Zahlen, welche offenbar immer um 6 steigen; als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

Solchergestalt wird man auch leicht die Cubos von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$; von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nämlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubos nehmen. Also vom Bruche $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

155.

Wenn von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen einzeln Bruch verwandelt werden, da denn die Rechnung leicht angestellet wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubum zu finden: denn da $1\frac{1}{2}$ zu einen einzeln Bruch gebracht $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$, das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der

der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab, der Cubus seyn aaabbb; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl zwey oder mehr Factores hat, der Cubus davon gefunden werde, wenn man die Cubos von jeglichen Factoren mit einander multiplicirt. Also z. E. weil 12 so viel ist, als 3. 4, so multiplicirt man den Cubus von 3, welcher ist 27, mit dem Cubus von 4, welcher ist 64, so bekömmt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2a ist 8aaa, und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3a der Cubus 27aaa, und also 27 mal größer als der Cubus von a.

157.

Ziehen wir nun auch die Zeichen + und − in Betrachtung, so ist für sich klar, daß von einer Positivzahl +a der Cubus +aaa, und folglich auch Positiv seyn müsse. Wenn aber von einer Negativzahl, als −a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist +aa, und da solches nochmals mit −a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus seyn −aaa, und wird folglich auch Negativ seyn. Dahero es mit den Cubis eine ganz andere Bewandniß hat, als mit den Quadraten, welche allezeit Positiv herauskommen. Also ist von −1, der Cubus −1, von −2, der Cubus −8; von −3, ist er −27, und so fort.

Capitel 15.

Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

158.

Da gezeiget worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche dreymal mit sich selbst multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre Cubicwurzel genennet. Also ist die Cubicwurzel aus einer vorgegebenen Zahl, eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wenn also die vorgegebene Zahl eine wirkliche Cubiczahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubicwurzel davon zu finden. Also ist von 1, die Cubicwurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, und so fort:

Eben so ist auch von -27, die Cubicwurzel -3; von -125, ist sie -5. Wenn auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubicwurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner, wenn es eine vermischte Zahl ist, als $2\frac{10}{27}$, welche in einen einzeln Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubicwurzel davon $\frac{4}{3}$ das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wenn aber die vorgegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubicwurzel davon, weder durch ganze, noch gebrochene Zahlen, ausdrücken; also da 43 keine Cubiczahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen noch gebrochenen Zahlen, eine

Zahl

Zahl angezeiget werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wissen wir doch so viel, daß die Cubicwurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner, als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wissen wir, daß die verlangte Cubicwurzel zwischen den Zahlen 3 und 4, enthalten seyn müsse.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubicwurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen, so könnte man der Wahrheit näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemals genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubicwurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubicwurzel aus 43, auf keinerley Weise durch ganze Zahlen und Brüche, ausdrücken lasse; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedienet man sich dieselben anzuzeigen dieses Zeichens ($\sqrt[3]{}$), so vor die gegebene Zahl gesetzet, und mit dem Worte Cubicwurzel ausgesprochen wird, um dasselbe von der Quadratwurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$, die Cubicwurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbst multiplicirt 43, hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keinesweges zu den Rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrationalgrößen darstellen. Sie haben auch mit den Quadratwurzeln keine Gemeinschaft, und

es ist nicht möglich eine solche Cubicwurzel durch eine Quadratwurzel, als etwann $\sqrt{12}$ auszudrücken: denn da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$, und also noch Irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke Rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

165.

Sollte man eine Cubicwurzel, als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubicwurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubicwurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wenn $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Daher begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Daher auch umgekehrt, wenn die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat, der ein Cubus ist, die Cubicwurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folget, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem 8. 2 gleich ist.

167. Wenn

167.

Wenn die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubicwurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadratwurzeln geschehen; weil nämlich die Cubi von Negativzahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubicwurzel aus Negativzahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2 und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$, und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen $(-)$ so hinter dem Cubicwurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadratwurzeln der Negativzahlen geschehen.

Capitel 16.

Von den Potestäten, oder Potenzen überhaupt.

168.

Wenn eine Zahl mehrmals mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine Potestät, oder auch Potenz, bisweilen auch eine Dignität genennet. Auf Deutsch könnte dieser Name durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, und ein Cubus, wenn die Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind sowohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie vielmal eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, von

einander unterschieden. Also, wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zwente Potestät, welche also eben so viel ist, als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl viermal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennet, welche gemeiniglich mit dem Namen des Biquadrats beleget wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Namen zu führen pflegen.

170.

Um dieses besser zu erläutern, so bemerken wir, erstlich, daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben; weil, so vielmal man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgendermaßen fort:

Potestæten.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merkwürdig, nämlich:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,

weil sich darauf unsere ganze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu merken, daß die kleinen darüber gesetzten Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl a folgendergestalt verhalten:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	aa,	aaa,	aaaa,	aaaaa,	aaaaaa,	ꝛc.

Bey dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Unbequemlichkeit, daß, wenn sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man ebendenselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben lassen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art solche Potestäten auszudrücken eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nämlich über der Zahl, wovon z. E. die hundertste Potestät soll angezeigt werden, etwas seitwärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: Also a^{100}, welches

ausgesprochen wird, a elivirt oder erhaben zu Hundert, drückt die Hundertste Potestät von a aus. Die dabey oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der Exponent genennt zu werden, welche Namen wohl zu bemerken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu 2, die zweyte Potestät von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von a aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl a folgendergestalt vorgestellt,

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \text{ꝛc.}$$

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied a, gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallend zu machen. Dahero ist a^1 nichts anders als a, weil die Unität anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so viel mal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeden Gliede das vorherge-

hergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eines vermindert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merkwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müsse, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja so gar auch, wenn a nichts ist, also das 0^0 gewiß 1 ausmacht.

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem wir immer das Glied durch a theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins vermindern, oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beyderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwärts vorstellen, welche auch rückwärts von der rechten zur linken gelesen werden muß;

1ste	$\frac{1}{aaaaaa}$ $\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{aaaaa}$ $\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{aaaa}$ $\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{aaa}$ $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{aa}$ $\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^1}$	1	a
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten, deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande, den Werth derselben genau

anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgendergestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

— — a^{-1} — — — $\frac{1}{a}$

— — a^{-2} — — — $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

— — a^{-3} — — — $\frac{1}{a^3}$

— — a^{-4} — — — $\frac{1}{a^4}$. und so fort.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müssen. Dieselben sind nämlich:

ab oder a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, ꝛc.

Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$\frac{a^1}{b^1}$ $\frac{a^2}{b^2}$ $\frac{a^3}{b^3}$ $\frac{a^4}{b^4}$ $\frac{a^5}{b^5}$ $\frac{a^6}{b^6}$ $\frac{a^7}{b^7}$. ꝛc.

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativzahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativzahl $-a$, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen,

$-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$ ꝛc.

Woraus erhellet, daß nur diejenige Potestäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; Hinge-

Hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also haben die dritte, fünfte, siebente, neunte, Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen −.

Die zweyte, vierte, sechste, achte, Potestäten hingegen alle das Zeichen +.



Capitel 17.

Von den Rechnungsarten mit den Potestäten.

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und − verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potestät des a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beydes kann nicht kürzer ausgedrückt werden. Wenn aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ rc.

181.

Bey der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich, wenn eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbst multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponens um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt, giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt, giebt a^4 rc. Eben so mit denjenigen, deren Exponenten negativ sind, wenn dieselben mit a multiplicirt werden sollen,

sollen, darf man nur zu dem Exponens 1 addiren; Also a^{-1} mit a multiplicirt, giebt a^0, das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist, welches mit a multiplicirt, $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wenn solches mit a multiplicirt werden soll, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, und so fort.

182.

Wenn aber eine Potestät mit aa, oder mit der zweyten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponens um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt, giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt, giebt a^5; ferner, a^4 mit a^2 multiplicirt, giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt, giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativexponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1, das ist a, welches daraus klar ist, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt, giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^{-2} multiplicirt, giebt a^{-1}.

183.

Eben so ist klar, daß, wenn eine jegliche Potestät mit der dritten Potestät von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponens derselben um 3 vermehrt werden müsse; oder a^n mit a^3 mult. giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wenn zwey Potestäten von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potestät von a, deren Exponens die Summe ist von jenen

jenen Exponenten. Also a^4 mit a^5 mult. giebt a^9, und a^{12} mit a^7 mult. giebt a^{19} ꝛc.

184.

Aus diesem Grunde können die hohen Potestäten von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; als wenn man z. E. die XXIVste Potestät von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wenn man die XIIte Potestät mit der XIIten Potestät multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, so wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096, so wird das Product 16777216 die verlangte Potestät, nämlich 2^{24} anzeigen.

185.

Bey der Division ist folgendes zu merken. Erstlich, wenn eine Potestät von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt, giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1}, oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt, giebt a^{-4}.

186.

Wenn hernach eine Potestät von a, durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt, was für eine Potestät auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt, giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt, giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt, giebt a^{-7}.

187.

Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potestäten von Potestäten gefunden werden müssen, weil solches durch die

die Multiplication geschieht. Also wenn man die zweyte Potestät, oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potestät, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß um das Quadrat einer Potestät zu finden, der Exponent derselben nur verdoppelt werden müsse. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus, oder die dritte Potestät von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potestät von a^n gefunden a^{7n}, und so fort.

188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potestät von a, welche dahero das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potestät ein Biquadrat, oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potestät ein Quadratocubus genennt zu werden.

Endlich auch, weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potestät von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genennt zu werden. Mehrere Namen sind heut zu Tage nicht üblich.



Capitel 18.

Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potestäten.

189.

Weil die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubicwurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich

gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andere Potestät derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadratwurzel die zweyte Wurzel, und die Cubicwurzel die dritte Wurzel nennen, da denn diejenigen Wurzeln, deren vierte Potestät einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel heißen wird, und diejenige, deren fünfte Potestät derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel und so fort heißen wird.

190.

Wie die zweyte oder Quadratwurzel durch das Zeichen $\sqrt{}$, und die dritte oder Cubicwurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[3]{}$ angedeutet wird; so pflegt man gleicher Weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{}$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{}$, und so weiter, anzuzeigen; woraus denn klar ist, daß nach dieser Schreibart das Zeichen der Quadratwurzel also $\sqrt[2]{}$ ausgedruckt werden sollte. Weil aber die Quadratwurzel am öftersten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzelzeichen weggelassen. Daher, wenn in dem Wurzelzeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadratwurzel verstanden werden.

191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$ ist die IIte Wurzel von a
$\sqrt[3]{a}$ = = = IIIte = = = = a
$\sqrt[4]{a}$ = = = IVte = = = = a
$\sqrt[5]{a}$ = = = Vte = = = = a
$\sqrt[6]{a}$ = = = VIte = = = = a u. s. w.

Also, daß hinwiederum die

IIte Potestät von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist
IIIte = = = $\sqrt[3]{a}$ = = a = = = =
IVte = = = $\sqrt[4]{a}$ = = a = = = =
Vte = = = $\sqrt[5]{a}$ = = a = = = =
VIte = = = $\sqrt[6]{a}$ = = a = = u. s. f.

192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn, so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müssen.

Wobey zu merken, daß wenn für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potestäten von 1 immer 1 sind.

Wenn aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

193.

Wenn die Zahl a positiv ist, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubicwurzeln angeführt worden, daß auch alle übrige Wurzeln wirklich angezeigt werden können, und folglich wirkliche und mögliche Zahlen sind.

Ist

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweyten, vierten, sechsten, und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potestäten so wohl von Positiv- als Negativzahlen immer das Zeichen plus bekommen.

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potestäten von Negativzahlen auch negativ sind.

194.

Wir erhalten also daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder Surdischen Zahlen, weil so oft die Zahl a keine solche wirkliche Potestät ist, als die Wurzel anzeiget, so oft ist es auch nicht möglich, diese Wurzel durch ganze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehöret dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrationalzahlen genennt werden.

Capitel 19.

Von der Ausdrückung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeiget, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wenn man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potestät von a^n sey a^{2n}. Daher ist hinwiederum von der Potestät a^{2n} die Quadratwurzel a^n, und wird folglich gefunden, wenn man den Exponenten derselben halbirt, oder durch 2 dividirt.

196.

Also ist von a^2 die Quadratwurzel a^1, von a^4 ist die Quadratwurzel a^2, und von a^6 ist die Quadratwurzel a^3 und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wenn die Quadratwurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst, oder von a^1, wird die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadratwurzel anzudeuten wohl zu bemerken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müsse, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}.

Wenn also rückwärts von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubicwurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten, jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubicwurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3, und so fort.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wenn sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubicwurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbst, das ist, von a^1 die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher Weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen. --- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen, allein, da man einmal an jene Zeichen gewöhnt ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, dieselben gänzlich abzuschaffen. Doch wird heut zu Tage diese neue Art auch häufig gebraucht, als welche die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sey, sieht man gleich, wenn man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da denn offenbar heraus kommt a^1, das ist a.

201.

Hieraus ersieht man auch, wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müssen; als wenn man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potestät a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also, daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wenn man erstlich den

den Cubum oder die dritte Potestät von a sucht, welche a^3 ist, und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: Also, daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$, und so weiter. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

202.

Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch folgendergestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wenn man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$ eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{3\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wenn vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen, daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, woraus entspringet a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$; welches ferner verwandelt

wandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar merklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu merken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Arten kann vorgestellt werden. Denn da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$, und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche, und $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$, ꝛc. verwandelt werden kann; so ist klar, daß $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, imgleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$, imgleichen auch $\sqrt[8]{a^4}$, und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen könne ausgedruckt werden:

$\sqrt[2]{a^2}$, oder $\sqrt[3]{a^3}$, oder $\sqrt[4]{a^4}$, oder $\sqrt[5]{a^5}$, ꝛc.

205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten; als z. E. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solchergestalt hat man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt, giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$, oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

Capitel 20.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu besserer Erläuterung dienen, wenn wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redensart, ist so viel als, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun =, und wird ausgesprochen, ist gleich. Also, wenn geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder daß a dem b gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstand darstellt, ist unstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seyn demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen, und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also, wenn die beyden Zahlen a und b bekannt sind, so lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c finden soll.

208.

208.

Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wenn die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man fragt also, was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müsse, damit die Zahl c heraus komme: Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wenn man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also, um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren, und da wird $b = c - a$. Denn wenn a darzu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$, das ist c.

Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also, wenn die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige, von der sie abgezogen werden soll: als wenn z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genennt werden, weil $5 - 9 = -4$.

210.

Wenn viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdenn das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wenn die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wenn die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

211.

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wenn die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden. Es sey z. E. $a=3$ und $c=15$, so, daß $3b=15$, und es wird gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 heraus komme. Dieses geschieht nun durch die Division, und wird dahero überhaupt die Zahl b gefunden, wenn man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b=\frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen lasse, und gleichwohl der Buchstabe b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennt werden. Also, wenn wir annehmen $a=4$ und $c=3$, also, daß $4b=3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nämlich $b=\frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wenn viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selber multiplicirt werden müsse, als die Zahl b anweiset. Hier wird, wie oben gemeldet, a die Wurzel, b der Exponent, und a^b die Potestät genennet.

214.

Lasset uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, worinn also drey Buchstaben a, b, c, vorkommen. Dieses voraus gesetzt, so wird in der Lehre von den Potestäten gezeiget, wie man, wenn die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestät selbst, das ist, den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also das $c = 5^3$: woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potestät genommen werden müsse, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und den Exponenten b die Potestät c finden soll.

215.

Lasset uns nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt, oder verändert werden kann, also, daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekannt angenommen wird. Wobey zu merken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist, ob man nebst dem c noch a, oder b, für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfalls verwechselt werden können. Allein, dieses findet nicht statt bey den Potestäten, indem vor a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einigen Exempel leicht zu ersehen; wenn z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier wirklich noch zwey Fragen angestellt werden können, wovon die erste ist: Wenn nebst der Potestät c noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll; Die zweyte Frage aber ist, wenn nebst der Potestät c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzel. Denn wenn man z. E. $b=2$ und $a^2=c$, so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a=\sqrt[2]{c}$. Eben so, wenn $b=3$, so hat man $a^3=c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a=\sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müsse. Es wird nämlich seyn $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemerket worden, daß die verlangte Wurzel a weder im Ganzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational, oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannichfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese

diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig sey, nämlich, wenn außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf ganz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmal zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

Capitel 21.

Von den Logarithmen überhaupt.

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemerken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben fest gestellet werde, also, daß dieselbe immer einerley Werth behalte. Wenn nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennet, und um dieselben anzuzeigen, werde ich mich in Zukunft des Zeichens eines deutschen l bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt

vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = lc$, wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmal fest gestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c, nichts anders, als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$ so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzet man nun $b = 1$. so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $la = 1$: setzt man $b=2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $la^2 = 2$. Eben so wird man haben: $la^3 = 3$, $la^4 = 4$, $la^5 = 5$, und so ferner.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $l1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $l\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekömmt man $l\frac{1}{a^2} = -2$, $l\frac{1}{a^3} = -3$, $l\frac{1}{a^4} = -4$, 2c.

223.

Hieraus erhellet, wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zähler = 1, der Nenner aber eine Potestät von a ist, können angezeiget werden; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrationalzahlen; wenn nämlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus

garithmus von $a^{\frac{1}{2}}$, oder von $\sqrt{a}$. Dahero bekömmt man $l\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; Eben so $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $l\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u. s. f.

224.

Wenn aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponent geben, nämlich b, so daß die Potestät a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdenn hat man $b = lc$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{lc} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch ld angedeutet wird, also daß $a^{ld} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{lc} = c$, so bekömmt man $a^{lc+ld} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $lc + ld = lcd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere, so bekömmt man $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupteigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $lc + ld = lcd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Producte, als cd gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $lc - ld = l\frac{c}{d}$ enthalten, und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruche gefunden werde, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227. Und

227.

Und eben hierinn besteht der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil, wenn zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividiret werden sollen, man nur nöthig habe, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit, wenn die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wenn $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $lc + lc = lcc$, also ist $lcc = 2lc$: Eben so bekömmt man $lc^3 = 3lc$ und $lc^4 = 4lc$, und allgemein $lc^n = nlc$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekömmt man $lc^{\frac{1}{2}}$, das ist $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$; ferner auch für Negativzahlen lc^{-1}, das ist $l\frac{1}{c} = -lc$, und lc^{-2}, das ist $l\frac{1}{cc} = -2lc$, und so fort.

229.

Wenn man also solche Tabellen hat, worinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwersten Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen, imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln, sowohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbst, finden kann. Also, wenn man aus einer Zahl c die Quadratwurzel finden soll, so suchet man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist lc, hernach nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2}lc$, und diese ist der Logarithmus von der gesuchten

ten Quadratwurzel: also die Zahl, die diesem Logarithmus zukömmt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2c. und folglich alle Positivzahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten; das ist von Zahlen die größer sind als Eins.

Hingegen die Negativzahlen, als −1, −2, 2c. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ 2c. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch größer als nichts.

Hieraus folget, daß wenn der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als 0. Folglich können für Negativzahlen keine Logarithmen angezeiget werden, oder die Logarithmen von Negativzahlen sind unmöglich, und gehören zu dem Geschlechte der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses besser zu erläutern, wird dienlich seyn, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die üblichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andere Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wenn man a = 1 setzen wollte, so würden alle Potestäten davon, als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl, als c, gleich werden können.

Capitel

Capitel 22.

Von den üblichen Logarithmischen Tabellen.

232.

In diesen Tabellen wird, wie gemeldet zum Grunde geleget, daß die Wurzel $a = 10$ sey; Also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchen, wenn die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder, wenn der Logarithmus der Zahl c durch lc angedeutet wird, so hat man immer $10^{lc} = c$.

233.

Wir haben schon bemerket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$, also ist $l1 = 0$, $l10 = 1$, $l100 = 2$, $l1000 = 3$, $l10000 = 4$, $l100000 = 5$, $l1000000 = 6$.

Ferner $l\frac{1}{10} = -1$, $l\frac{1}{100} = -2$, $l\frac{1}{1000} = -3$, $l\frac{1}{10000} = -4$, $l\frac{1}{100000} = -5$, $l\frac{1}{1000000} = -6$.

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Hauptzahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwerer die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleichwohl in den Tabellen müssen angezeiget werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, daher wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabey zu beobachten vorkömmt.

235.

Da nun $l1 = 0$, und $l10 = 1$, so ist leicht zu erachten, daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, ihre Logarith-

garithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müssen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1;

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß, daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, also, daß l2 = x, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen das x viel kleiner seyn müsse als $\frac{1}{2}$, oder, daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, denn wenn man beyderseits die Quadraten nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$: das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: denn $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist, von diesem aber 16. Hieraus sieht man also das x oder der l2 kleiner ist als $\frac{1}{3}$, und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$, und größer als $\frac{1}{4}$, wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen, so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn, wenn aber dieses wäre, so müssen auch die siebende Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebende Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenden Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebende Potestät von $2 = 128$, und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner, als 2, und also $\frac{2}{7}$ kleiner als l2: oder l2 ist größer als $\frac{2}{7}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn; Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potestät $= 1024$; woraus wir schließen, daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder das $l2$ größer sey als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet, um zu zeigen, daß $l2$ seine bestimmte Größe habe, weil wir wissen, daß derselben gewiß größer ist als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wissen, so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $l2 = x$, und zeigen, wenn derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen, die Logarithmen finden könne; wozu die oben gegebene Gleichung dienet $lcd = lc + ld$, oder, daß der Logarithmus von einem Producte gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.

237.

Da nun $l2 = x$, und $l10 = 1$, so bekommen wir $l20 = x + 1$, und $l200 = x + 2$, ferner $l2000 = x + 3$; weiter $l20000 = x + 4$, und $l200000 = x + 5$, u. s. f.

238.

Da ferner $lc^2 = 2lc$ und $lc^3 = 3lc$, $lc^4 = 4lc$, ꝛc. so erhalten wir daher $l4 = 2x$, $l8 = 3x$, $l16 = 4x$, $l32 = 5x$, $l64 = 6x$, ꝛc.

Hieraus finden wir ferner $l40 = 2x + 1$, $l400 = 2x + 2$, $l4000 = 2x + 3$, $l40000 = 2x + 4$, ꝛc.

$l80 = 3x + 1$, $l800 = 3x + 2$, $l8000 = 3x + 3$, $l80000 = 3x + 4$, ꝛc.

$l160 = 4x + 1$, $l1600 = 4x + 2$, $l16000 = 4x + 3$, $l160000 = 4x + 4$, ꝛc.

239. Da

239.

Da ferner gefunden worden $l\frac{c}{d} = lc - ld$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $l10 = 1$ und $l2 = x$, so bekommen wir $l\frac{10}{2}$, das ist $l5 = 1 - x$; daher erhalten wir

$l50 = 2 - x$, $l500 = 3 - x$, $l5000 = 4 - x$, ꝛc.

ferner, $l25 = 2 - 2x$, $l125 = 3 - 3x$, $l625 = 4 - 4x$, ꝛc.

Daher gelangen wir weiter zu folgenden:

$l250 = 3 - 2x$, $l2500 = 4 - 2x$, $l25000 = 5 - 2x$, ꝛc.

ferner,

$l1250 = 4 - 3x$, $l12500 = 5 - 3x$, $l125000 = 6 - 3x$, ꝛc.

ferner,

$l6250 = 5 - 4x$, $l62500 = 6 - 4x$, $l625000 = 7 - 4x$, und so fort.

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden, so könnte man daher noch von unendlich viel mehrern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für $l3$ setzen, und daher würden wir haben:

$l30 = y + 1$, $l300 = y + 2$, $l3000 = y + 3$, ꝛc.

$l9 = 2y$, $l27 = 3y$, $l81 = 4y$, $l243 = 5y$, ꝛc.

daher kann man noch weiter finden:

$l6 = x + y$, $l12 = 2x + y$, $l18 = x + 2y$,

imgleichen auch $l15 = l3 + l5 = y + 1 - x$.

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den sogenannten Primzahlen durch die Multiplication hervorgebracht werden. Also, wenn nun die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen bloß durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, 2. 3. 5. 7, wird seyn der Logarithmus $= l2 + l3 + l5 + l7$: gleichergestalt

da $360 = 2.\,2.\,2.\,3.\,3.\,5 = 2^3\,3^2.\,5$, so wird $l360 = 3l2 + 2l3 + l5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen, die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Primzahlen gefunden werden.

Capitel 23.

Von der Art die Logarithmen vorzustellen.

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$, und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder, daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müsse, wenn die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrationalzahl, und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, daher sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hierzu bedienet man sich der sogenannten Decimalbrüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erkläret zu werden verdienet.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art alle Zahlen mit den zehen Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß

daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal grösser werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort, auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5 die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10. 6 oder 60 anzeiget: die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100. 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man saget:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

244.

Wie nun von der Rechten zur Linken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer, und folglich von der Linken zur Rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetze noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da denn die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wenn man dahero diese Zahl geschrieben findet, als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der Linken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$, und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie vor nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellet. Daselbst wird z.E. der Logarithmus von 2 also ausgedruckt 0,3010300. Wobey folglich zu merken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes betrage, und daß sein Werth sey $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglassen können, allein dieselben dienen um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilchen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinigkeit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0, 4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes betrage, sondern, daß er aus diesen Brüchen bestehe,

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestalt ganz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht lassen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0, 0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1, 0000000, woraus man erkennet, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2, 0000000, oder just 2, woraus zu sehen, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder, welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müssen, und folglich durch 1

und

und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist l50 = 1, 6989700, derselbe ist also 1, und noch über das $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000, enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimalbruche; als l800 = 2, 9030900. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4, und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemerken. Der erste steht vor dem Comma und zeiget die Ganzen an, wenn dergleichen vorhanden; der andere Theil aber zeiget die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesetzt werden müssen. Also ist es leicht den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus einer jeglichen Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner, als die Anzahl der Ziffern. Wenn man also den Logarithmus von 1766 verlanget, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, sobald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weiß man, aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist, als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man sogleich, daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren

bestehe, und also grösser seyn müsse als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000: denn $l3000000 = l3 + l1000000$. Nun aber ist $l3 = 0,4771213$ und $l1000000 = 6$, welche zwey Logarithmus zusammen addirt, geben 6. 4771213.

250.

Bey einem jeglichen Logarithmus kömmt also die Hauptsache auf den nach dem Comma folgenden Decimalbruch an, welcher, wenn er einmal bekannt ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist, für den andern Theil aber, nämlich den Decimalbruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also, daß $l365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, $l3650 = 3 + x$; $l36500 = 4 + x$; $l365000 = 5 + x$. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir $l36,5 = 1 + x$; $l3,65 = 0 + x$; $l0,365 = -1 + x$; $l0,0365 = -2 + x$; $l0,00365 = -3 + x$, und so ferner.

251.

Vor alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen o hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimalbruch in ihren Logarithmis, und der Unterscheid befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Comma, welche, wie wir gesehen, auch negativ werden kann, wenn nämlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativzahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pfleget man schon 10 zu schreiben, da man denn anstatt -1, bekömmt 9; anstatt -2 bekömmt man 8; anstatt -3, bekömmt man 7, und so fort. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelassen

gelassen werden, daß die ganze Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma, entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgestellet werden, welches in den großen Vlacquischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimalbruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt, und wenn größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelchen beygefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müsse.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zu-

kommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache besser zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung also zu stehen.

$$\left.\begin{array}{l} l\,343 = 2,\ 5352941 \\ l\,2401 = 3,\ 3803922 \end{array}\right\}\text{addirt}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5,\ 9156863 \\ 6847 \end{array}\right\}\text{subtrahirt}$$

Giebt also 823543. 16

Diese Summe ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimalbruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig, den Logarithmus von 10, welcher ist 1,0000000 durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0,5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen grösser ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts.

Des

Des

Ersten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von

den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.



Des Ersten Theils Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Capitel 1.

Von der Addition mit zusammengesetzten Größen.

256.

Wenn zwey oder mehr Formeln, welche aus viel Gliedern bestehen, zusammen addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen angedeutet zu werden, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt, und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also, wenn diese Formel $a+b+c$ und $d+e+f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe also angezeigt:

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

Solchergestalt wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß um dieselbe zu vollziehen, man nur nöthig habe, die Klammern weg zu lassen: denn da die Zahl $d+e+f$, zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches, wenn man erstlich $+d$, hernach $+e$, und endlich $+f$ hinzu schreibt, da denn die Summe seyn wird:

$$a+b+c+d+e+f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wenn einige Glieder das Zeichen $-$ hätten, als welche sodann gleichfalls mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in puren Zahlen betrachten, und zu der Formel $12-8$ noch diese $15-6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12-8+15$: man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15-6$ addiren sollte, und es ist klar, daß man 6 zu viel addiret habe: man nehme also diese 6 wieder weg, oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summe:

$$12-8+15-6.$$

Woraus erhellet, daß die Summe gefunden wird, wenn man alle Glieder, ein jedes mit seinem Zeichen, zusammen schreibt.

259.

Wenn demnach zu dieser Formel $a-b+c$ noch diese $d-e-f$ addirt werden soll, so wird die Summe folgendergestalt ausgedrückt:

$$a-b+c+d-e-f.$$

Wobey wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern dieselben

nach

nach Belieben unter einander versetzt werden können, wenn nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summe auch also geschrieben werden:

$$c - e + a - f + d - b.$$

260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also, wenn zu dieser Formel $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\,lc$ noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summe seyn:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\,lc + 5\sqrt[5]{a} - 7c;$$

woraus erhellet, daß dieses die Summe sey, und es auch erlaubt ist, diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wenn nur ein jedes sein Zeichen behält.

261.

Oefters trägt es sich aber zu, daß die solchergestalt gefundene Summe weit kürzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gänzlich aufheben. Als wenn in der Summe diese Glieder $+a-a$, oder solche $3a - 4a + a$ vorkäme. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in eines gebracht werden, wie z. E.

$$3a + 2a = 5a,\quad 7b - 3b = +4b,\quad -6c + 10c = +4c$$
$$5a - 8a = -3a,\quad -7b + b = -6b,\quad -3c - 4c = -7c$$
$$2a - 5a + a = -2a,\quad -3b - 5b + 2b = -6b.$$

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2aa + 3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen und $2b^3 - b^4$ läßt sich auch nicht abkürzen.

262.

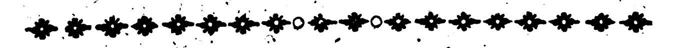
262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a+b$ und $a-b$, da denn nach obiger Regel heraus kommt $a+b+a-b$, nun aber ist $a+a=2a$ und $b-b=0$, folglich ist die Summe $=2a$; welches Exempel folgende sehr nützliche Wahrheit anzeiget.

Wenn zu der Summe zweyer Zahlen $(a+b)$ ihre Differenz $(a-b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgende Exempel:

$3a-2b-c$	$a^3-2aab+2abb$
$5b-6c+a$	$-aab+2abb-b^3$
$4a+3b-7c$	$a^3-3aab+4abb-b^3.$



Capitel 2.

Von der Subtraction mit zusammengesetzten Größen.

263.

Wenn man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige, welche abgezogen werden soll, wird mit Vorsetzung des Zeichen $-$ an diejenige angehänget, von welcher sie abgezogen werden soll. Also, wenn von dieser Formel $a-b+c$ diese $d-e+f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet

$$(a-b+c)-(d-e+f)$$

als woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

264.

264.

Um aber die Subtraction wirklich zu vollziehen, so ist vor das erste zu merken, daß, wenn von einer Größe als a eine andere positive Größe als $+ b$ abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a - b$;

Wenn aber eine negative Zahl als $- b$ von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a + b$, weil eine Schuld wegnehmen, eben so viel ist als etwas schenken.

265.

Laßt uns nun setzen, man soll von dieser Formel $a - c$ diese $b - d$ subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, da bekommt man $a - c - b$; wir haben aber zu viel weg genommen, denn wir sollten nur $b - d$ weg nehmen, und das um d zu viel: wir müssen also dieses d wieder hinzu setzen, da wir denn erhalten

$$a - c - b + d,$$

woraus sich diese Regel offenbar ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen, mit verkehrten Zeichen hinzu geschrieben werden müssen.

266.

Durch Hülfe dieser Regel ist es also ganz leicht, die Subtraction zu verrichten, indem die Formel, von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hin geschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit verkehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Also im ersten Exempel, da von $a - b + c$ diese Formel $d - e + f$ abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a - b + c - d + e - f.$$

Um dieses mit puren Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9 - 3 + 2$ diese Formel $6 - 2 + 4$, da bekömmt man

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0.$$

welches auch so gleich in die Augen fällt; denn

$$9-3+2=8,\quad 6-2+4=8,\quad \text{und } 8-8=0.$$

267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemerken, daß, wenn in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a+b$, wodurch die Summe zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a-b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich, $a+b-a+b$; nun aber ist $a-a=0$ und $b+b=2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$$\begin{array}{c|c} aa+ab+bb & 3a-4b+5c \\ bb-ab+aa & 2b+4c-6a \\ \hline 2ab & 9a-6b+c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a^3+3aab+3abb+b^3 \\ a^3-3aab+3abb-b^3 \\ \hline 6aab+2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{a}+2\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-3\sqrt{b} \\ \hline +5\sqrt{b}. \end{array}$$

Capitel 3.

Von der Multiplication mit zusammengesetzten Grössen.

270.

Wenn eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multipliciret werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punkt an einander gehängt.

Also wenn diese beyde Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solcher Gestalt anzeiget:

$$(a - b + c) . (d - e + f) \text{ oder } (a - b + c)(d - e + f).$$

Diese Art wird sehr häufig gebraucht, weil man daraus so gleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich angestellt werden müsse, so ist erstlich zu merken, daß wenn eine solche Formel $a - b + c$ z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müsse, und also herauskomme

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wenn also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man:

$$ad - bd + cd,$$

272.

Hier haben wir voraus gesetzt, daß die Zahl d positiv sey: wenn aber mit einer Negativzahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nämlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Daher bekommt man:

$$-ae+be-ce.$$

273.

Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte als $d-e$ multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A mit $7-3$ multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wenn man mit $d-e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e, und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also, daß heraus kommt $dA-eA$. Laßt uns nun setzen $A=a-b$, welches mit $d-c$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline \quad\quad\; ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product $(a-b).(d-e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplicationsexempel folgendergestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{l} a - b \\ d - e \\ \hline ad-bd-ae+be \end{array}$$

wor-

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müsse, und daß wegen der Zeichen die oben gegebene Regel gänzlich Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wenn etwann jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regel wird es also leicht seyn, folgendes Exempel auszurechnen; $a+b$ soll multiplicirt werden mit $a-b$:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ \quad\; - ab - bb \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn $aa - bb$

276.

Wenn also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wenn die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellt werden:

$$(a+b)(a-b) = aa - bb.$$

Folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzel, und ist also keine Primzahl.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

I)
$$\begin{array}{l} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \\ \quad + 4a - 6 \\ \hline 2aa + a - 6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{l} 4aa - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12aa + 18a \\ \quad + 12aa - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{l} 3aa - 2ab - bb \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4aab - 2abb \\ \quad - 12aab + 8abb + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{l} aa + 2ab + 2bb \\ aa - 2ab + 2bb \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2aabb \\ \quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\ \quad + 2aabb + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4. \end{array}$$

V.)
$$\begin{array}{l} 2aa - 3ab - 4bb \\ 3aa - 2ab + bb \\ \hline 6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\ \quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\ \quad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4. \\ \hline 6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4. \end{array}$$

VI.)
$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^3 + abb + acc - aab - aac - abc \\ \quad - abb - acc + aab + aac - abc + b^3 + bcc - bbc \\ \quad - abc - bcc + bbc + c^3 \\ \hline a^3 - 3abc + b^3 + c^3. \end{array}$$

278.

Wenn mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das

Product

Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müsse, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darinn beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factores besteht, gefunden werden:

$$\overset{\text{I.}}{(a+b)}\overset{\text{II.}}{(aa+ab+bb)}\overset{\text{III.}}{(a-b)}\overset{\text{IV.}}{(aa-ab+bb)}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{II.} & aa & +ab & +bb & \\
\text{I.} & a & +b & & \\
\hline
 & a^3 & +aab & +abb & \\
 & & +aab & +abb & +b^3 \\
\hline
\text{I. II.} & a^3 & +2aab & +2abb & +b^3
\end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{IV.} & aa & -ab & +bb & \\
\text{III.} & a & -b & & \\
\hline
 & a^3 & -aab & +abb & \\
 & & -aab & +abb & -b^3 \\
\hline
\text{III. IV.} & a^3 & -2aab & +2abb & -b^3
\end{array}$$

Nun ist also noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\text{I. II.} = & a^3 & +2aab & +2abb & +b^3 & & & \\
\text{III. IV.} = & a^3 & -2aab & +2abb & -b^3 & & & \\
\hline
 & a^6 & +2a^5b & +2a^4bb & +a^3b^3 & & & \\
 & & -2a^5b & -4a^4bb & -4a^3b^3 & -2aab^4 & & \\
 & & & +2a^4bb & +4a^3b^3 & +4aab^4 & +2ab^5 & \\
 & & & & -a^3b^3 & -2aab^4 & -2ab^5 & -b^6 \\
\hline
 & a^6 & & & & & & -b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und sodann die II. mit der IV. multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{I. } a + b \\ \text{III. } a - b \\ \hline aa + ab \\ \quad - ab - bb \\ \hline \text{I. III.} = aa - bb \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{II. } aa + ab + bb \\ \text{IV. } aa - ab + bb \\ \hline a^4 + a^3b + aabb \\ \quad - a^3b - aabb - ab^3 \\ \qquad + aabb + ab^3 + b^4 \\ \hline \text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4 \end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4 \\ \text{I. III.} = aa - bb \\ \hline a^6 + a^4bb + aab^4 \\ \quad - a^4bb - aab^4 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6 \end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen, und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren,

$$\begin{array}{l} \text{IV. } aa - ab + bb \\ \text{I. } a + b \\ \hline a^3 - aab + abb \\ \quad + aab - abb + b^3 \\ \hline \text{I. IV.} = a^3 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{II. } aa + ab + bb \\ \text{III. } a - b \\ \hline a^3 + aab + abb \\ \quad - aab - abb - b^3 \\ \hline \text{II. III.} = a^3 - b^3 \end{array}$$

Nun

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren

$$\begin{array}{rl} \text{I. IV.} & = a^3 + b^3 \\ \text{II. III.} & = a^3 - b^3 \\ \hline & a^6 + a^3b^3 \\ & \quad - a^3b^3 - b^6 \\ \hline & a^6 - b^6 \end{array}$$

281.

Es ist der Mühe werth, dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a=3$ und $b=2$; so hat man $a+b=5$ und $a-b=1$; ferner $aa=9$, $ab=6$, $bb=4$. Also ist $aa+ab+bb=19$, und $aa-ab+bb=7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

5. 19. 1. 7. welches ist 665.

Es ist aber $a^6=729$ und $b^6=64$, folglich $a^6-b^6=665$, wie wir schon gesehen haben.

Capitel 4.

Von der Division mit zusammengesetzten Größen.

282.

Wenn man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich, entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man das Dividend über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt: oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividend mit darzwischen gesetzten zwey Puncten. Also, wenn $a+b$ durch $c+d$ getheilt

theilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber also $(a+b):(c+d)$; beydes wird ausgesprochen $a+b$ getheilt durch $c+d$.

283.

Wenn eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. E.

$6a-8b+4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a-4b+2c$
und $(aa-2ab):(a)=a-2b$:
Eben so $(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb$:
ferner $(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc$:
und $(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c$ &c.

284.

Wenn sich etwann ein Glied des Dividends nicht theilen läßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wenn $a+b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotient $1+\frac{b}{a}$.

Ferner $(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$.

Wenn weiter $(2a+b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a+\frac{b}{2}$; wobey zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$ mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$, und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ &c.

285.

Wenn aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters wirklich geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen scheint; denn wenn die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den Quotienten, wie oben gemeldet, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, wo die Division wirklich angeht.

286.

Es soll demnach das Dividend ac − bc durch den Divisor a − b getheilet werden: der Quotient muß demnach also beschaffen seyn, daß, wenn der Divisor a − b damit multiplicirt wird, das Dividend ac − bc herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotus c stehen muß, weil sonsten nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotus ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren, und sehen, ob das ganze Dividend herauskomme oder nur ein Theil desselben? In unserm Falle aber, wenn a − b mit c multiplicirt wird, so bekommen wir ac − bc, welches das Dividend selbst ist: folglich ist c der völlige Quotus. Eben so ist klar, daß $(aa + ab) : (a + b) = a$, und $(3aa - 2ab) : (3a - 2b) = a$, ferner $(6aa - 9ab) : (2a - 3b) = 3a$.

287.

Auf solche Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wenn derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht das Dividend erschöpft, so muß man das übrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, da man denn wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestalt verfährt man bis man den ganzen Quotient erhalte.

Wir

Wir wollen z. E. $aa + 3ab + 2bb$ durch $a + b$ theilen; da ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten müsse, weil sonst nicht aa herauskommen könnte. Wenn aber der Divisor $a + b$ mit a multiplicirt wird, so kömmt $aa + ab$, welches vom Dividend abgezogen $2ab + 2bb$ nachläßt, welches also noch durch $a + b$ getheilet werden muß, wo sogleich in die Augen fällt, daß im Quotient $2b$ stehen müsse. Nun aber $2b$ mit $a + b$ multiplicirt, giebt just $2ab + 2bb$; folglich ist der gesuchte Quotient $a + 2b$, welcher mit dem Divisor $a + b$ multiplicirt das Dividend giebt. Diese ganze Operation wird folgender Gestalt vorgestellet

$$
\begin{array}{l}
a + b)\ aa + 3ab + 2bb\ (a + 2b \\
\quad\quad aa + ab \\
\hline
\quad\quad\quad + 2ab + 2bb \\
\quad\quad\quad + 2ab + 2bb \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählet man einen Theil des Divisors, als wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt, und nach diesem Buchstaben schreibt man auch das Dividend in solcher Ordnung, daß die höchsten Potestäten von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{l}
a - b)\ a^3 - 3aab + 3abb - b^3\ (aa - 2ab + bb \\
\quad\quad a^3 - aab \\
\hline
\quad\quad - 2aab + 3abb \\
\quad\quad - 2aab + 2abb \\
\hline
\quad\quad\quad + abb - b^3 \\
\quad\quad\quad + abb - b^3 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

$a + b)$

$$\begin{array}{l}
a + b)\ aa - bb\ (a - b \\
\quad aa + ab \\
\quad\ \ - ab - bb \\
\quad\ \ - ab - bb \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3a - 2b)\ 18aa - 8bb\ (6a + 4b \\
\quad 18aa - 12ab \\
\qquad + 12ab - 8bb \\
\qquad + 12ab - 8bb \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a + b)\ a^3 + b^3\ (aa - ab + bb \\
\quad a^3 + aab \\
\quad - aab + b^3 \\
\quad - aab - abb \\
\qquad + abb + b^3 \\
\qquad + abb + b^3 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2a - b)\ 8a^3 - b^3\ (4aa + 2ab + bb \\
\quad 8a^3 - 4aab \\
\quad + 4aab - b^3 \\
\quad + 4aab - 2abb \\
\qquad + 2abb - b^3 \\
\qquad + 2abb - b^3 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa - 2ab + bb)\ a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4\ (aa - 2ab + bb \\
\quad a^4 - 2a^3b + aabb \\
\quad - 2a^3b + 5aabb - 4ab^3 \\
\quad - 2a^3b + 4aabb - 2ab^3 \\
\qquad + aabb - 2ab^3 + b^4 \\
\qquad + aabb - 2ab^3 + b^4 \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa - 2ab + 4bb)\ a^4 + 4aabb + 16b^4\ (aa + 2ab + 4bb \\
\quad a^4 - 2a^3b + 4aabb \\
\quad + 2a^3b + 16b^4 \\
\quad + 2a^3b - 4aabb + 8ab^3 \\
\qquad + 4aabb - 8ab^3 + 16b^4 \\
\qquad + 4aabb - 8ab^3 + 16b^4 \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

aa − 2ab

$$aa - 2ab + 2bb)\ a^4 + 4b^4\ (aa + 2ab + 2bb$$
$$\underline{a^4 + 2a^3b + 2aabb}$$
$$+ 2a^3b - 2aabb + 4b^4$$
$$\underline{+ 2a^3b - 4aabb + 4ab^3}$$
$$+ 2aabb - 4ab^3 + 4b^4$$
$$\underline{+ 2aabb - 4ab^3 + 4b^4}$$
$$0$$

$$1-2x+xx)\ 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3xx-x^3$$
$$\underline{1-2x+xx}$$
$$-3x+9xx-10x^3$$
$$\underline{-3x+6xx-3x^3}$$
$$+3xx-7x^3+5x^4$$
$$\underline{+3xx-6x^3+3x^4}$$
$$-x^3+2x^4-x^5$$
$$\underline{-x^3+2x^4-x^5}$$
$$0$$

Capitel 5.

Von der Auflösung der Brüche in unendlichen Reihen.

289.

Wenn sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeiget, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also, wenn 1 durch $1 - a$ getheilet werden soll, so bekömmt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellet und so weit man will fortgesetzt werden, da

denn

denn immer der wahre Quotus, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

290.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns das Dividend 1, wirklich durch den Divisor 1−a theilen, wie folget:

$$1-a)\,1\,(1+\frac{a}{1-a} \qquad \text{oder} \qquad 1-a)\,1\,(1+a+\frac{aa}{1-a}$$

$$\frac{+1-a}{\text{Rest } +a} \qquad\qquad \frac{+1-a}{+a} \quad \frac{+a-aa}{\text{Rest } +aa}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch 1−a, als

$$1-a)\,aa\,(aa+\frac{a^3}{1-a}, \qquad \text{ferner} \quad 1-a)\,a^3\,(a^3+\frac{a^4}{1-a}$$

$$\frac{aa-a^3}{+a^3} \qquad\qquad \frac{a^3-a^4}{+a^4}$$

$$\text{ferner} \quad 1-a)\,a^4\,(a^4+\frac{a^5}{1-a}$$

$$\frac{a^4-a^5}{+a^5 \text{ ꝛc.}}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedrückt werden kann,

I.) $1+\frac{a}{1-a}$ II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$,

III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^9}{1-a}$, ꝛc.

Man

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1, so viel, als $\frac{1-a}{1-a}$: folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{aa}{1-a}$ bringe man den ganzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekömmt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ giebt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der ganze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind, als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292.

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen, als man will, ohne daß man weiter nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset, welche ist:

$$1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}, \text{ꝛc.}$$

ins

ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit Recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ꝛc. bis ins Unendliche, welche dem Bruche $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemerket, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.

Wenn man aber setzet $a = 2$, so wird unsere Reihe $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ ꝛc. bis ins unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu merken, daß, wenn man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also, wenn wir z. E. bey 64 still stehen, so müssen wir zu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus entsteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man steht aber hingegen auch niemals still.

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wenn für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$, so bekömmt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$, ꝛc. ohne Ende. Denn nimmt man nur zwey Glieder, so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlet noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlet noch $\frac{1}{4}$: nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlet noch $\frac{1}{8}$: woraus man sieht, daß immer weniger fehlet, folglich, wenn man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem daher folgende Reihe gleich ist $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$, ꝛc. bis ins Unendliche. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlet noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{4}{9}$, fehlet noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlet noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a = \frac{2}{3}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird:

$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$, ꝛc. bis ins Unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$, so fehlet noch $1\frac{1}{3}$.

Nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$, so fehlet noch $\frac{8}{9}$.

Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$, so fehlet noch $\frac{16}{27}$.

297. Es

297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ etc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$, so fehlet noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{5}{16}$, fehlet noch $\frac{1}{48}$, etc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wenn man den Zähler 1 durch den Nenner $1 + a$ wirklich dividirt, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1\ (1 - a + aa - a^3 + a^4 \\
\underline{1 + a} \\
\quad - a \\
\quad \underline{- a - aa} \\
\qquad + aa \\
\qquad \underline{+ aa + a^3} \\
\qquad\quad - a^3 \\
\qquad\quad \underline{- a^3 - a^4} \\
\qquad\qquad + a^4 \\
\qquad\qquad \underline{+ a^4 + a^5} \\
\qquad\qquad\quad - a^5 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Daher ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7, \text{ etc.}$$

299.

Setzet man $a = 1$, so erhält man diese merkwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ rc.}$$

bis ins Unendliche; welches wiedersinnig scheint: denn wenn man irgendwo mit -1 aufhöret, so giebt diese Reihe 0; höret man irgend aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein, eben hieraus läßt sich die Sache begreifen, weil, wenn man ohne Ende fortgehen, und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen, sondern etwas darzwischen, welches $\frac{1}{2}$ ist.

300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchen folglich gleich seyn wird diese Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ rc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$, rc.

301.

Setzet man $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ rc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder, so man man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, und so fort.

302. Man

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andere Art auflösen, indem man 1 durch a + 1 theilet, nämlich:

$$a+1)\ 1\ (\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}\ \text{etc.}$$

$$1 + \frac{1}{a}$$

$$\overline{\quad - \frac{1}{a} \quad}$$

$$- \frac{1}{a} - \frac{1}{aa}$$

$$\overline{\quad + \frac{1}{aa} \quad}$$

$$+ \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3}$$

$$\overline{\quad - \frac{1}{a^3} \quad}$$

$$- \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}$$

$$\overline{\quad + \frac{1}{a^4} \quad}$$

$$+ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}$$

$$\overline{\quad - \frac{1}{a^6}\ \text{etc.} \quad}$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich $\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6}$ 2c. ohne Ende:

Setzet man $a = 1$, so bekömmt man diese Reihe
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ 2c. $= \frac{1}{2}$, wie oben:

Setzet man $a = 2$, so bekömmt man diese Reihe
$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$, 2c.

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$a+b)\ c\ (\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ 2c.}$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

$$\overline{\quad - \frac{bc}{a}\quad}$$

$$- \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$$

$$\overline{\quad + \frac{bbc}{aa}\quad}$$

$$+ \frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}$$

$$\overline{\quad - \frac{b^3c}{a^3}\quad}$$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins Unendliche:

Es sey $a = 2$, $b = 4$ und $c = 3$, so haben wir $\frac{c}{a+b}$ $\frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ rc.

Es sey $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$, so haben wir $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1}$ $= 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000}$ rc.

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$, welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ rc.

304.

Wenn der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins Unendliche fortgesetzt werden.

Als wenn dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist, also gefunden:

$$1 - a + aa)\ 1\ (1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 \text{ ꝛc.}$$
$$\underline{1 - a + aa}$$
$$+ a - aa$$
$$\underline{+ a - aa + a^3}$$
$$- a^3$$
$$\underline{- a^3 + a^4 - a^5}$$
$$- a^4 + a^5$$
$$\underline{- a^4 + a^5 - a^6}$$
$$+ a^6$$
$$\underline{+ a^6 - a^7 + a^8}$$
$$+ a^7 - a^8$$
$$\underline{+ a^7 - a^8 + a^9}$$
$$- a^9 \text{ ꝛc.}$$

Daher haben wir diese Vergleichung $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$, so bekommt man diese Reihe $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ ꝛc. welche Reihe die schon oben gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ ꝛc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder, daß diese $\frac{2}{2}$, das ist 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Gleichung $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ ꝛc. Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so bekommt man diese Gleichung, als $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ ꝛc. Nimmt man hier vier Glieder, so bekommt man $\frac{104}{81}$, welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$, so bekommt man diese Gleichung $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ ꝛc. welche Reihe

der

der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man:

$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{13}{81} + \frac{69}{729}$ rc. welche vier Glieder machen $- \frac{2}{81}$.

305.

Solchergestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schafft, sondern auch an sich selbst höchst merkwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ungeachtet dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, daher diese Materie allerdings verdient, mit der größten Aufmerksamkeit in Erwägung gezogen zu werden.

Capitel 6.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

306.

Wenn das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbst multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ + ab + bb \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

307.

Wenn daher die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils, nämlich aa und bb, II. kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beyden Theile, nämlich $2ab$, und die ganze Summe $aa + 2ab + bb$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z.E. $a = 10$ und $b = 3$, also, daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

308.

Durch Hülfe dieser Formel lassen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wenn dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden, so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $aa + 2a + 1$; da nun das Quadrat von a ist aa, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden, wenn man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu merken, daß $2a + 1$ die Summe der beyden Wurzeln a und $a + 1$ ist; da also das Quadrat von 10 ist 100, so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und da das Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Noch ferner das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ ꝛc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; daher haben wir $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden:

$(a + 1)^2 = aa + 2a + 1$, $(a + 2)^2 = aa + 4a + 4$,
$(a + 3)^2 = aa + 6a + 9$, $(a + 4)^2 = aa + 8a + 16$,
und so ferner.

311.

Wenn die Wurzel ist $a - b$, so wird ihr Quadrat seyn $= aa - 2ab + bb$, welches daher aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 1$, so wird das Quadrat von 9 seyn $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a - b)^2 = aa - 2ab + bb$, so wird seyn $(a - 1)^2 = aa - 2a + 1$; Das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wenn man von aa subtrahirt $2a - 1$, welches die Summe der beyden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sey z. E. $a = 50$, so ist $aa = 2500$ und $a - 1 = 49$, daher $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, denn wenn man vor die Wurzel nimmt $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ [welches 1 ausmacht] so wird das Quadrat seyn:

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25} \text{ das ist } 1.$$

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ [welches $\frac{1}{6}$ ist] wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Wenn die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: Also von $a+b+c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac \qquad +bc \\ \quad +ab+ac+bb+bc+cc \\ \hline aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel, und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200+50+6$; daher das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird;

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 2500 \\ 36 \\ 20000 \\ 2400 \\ 600 \\ \hline 65536 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 256 \\ 256 \\ \hline 1536 \\ 1280 \\ 512 \\ \hline 65536 \end{array}$$

und dieses ist dem 256. 256 offenbar gleich.

316.

Wenn einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regel gefunden, wenn

wenn man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt, was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von $a - b - c$ wird das Quadrat seyn:

$$aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc.$$

Wenn also die Zahl 256 also vorgestellet wird $300 - 40 - 4$, so bekommt man:

Positive Theile	Negative Theile
+ 90000	− 24000
1600	2400
320	− 26400
16	
+ 91936	
− 26400	
65536. Quadrat von 256, wie oben.	

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

317.

Um hiervon eine sichere Regel zu geben, so müssen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches ist $aa + 2ab + bb$ genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man hinwiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel heraus bringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich, da das Quadrat $aa + 2ab + bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wur-

zel

zel aus mehr als einem Gliede bestehen müsse: und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats aa ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel seyn müsse a.

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nämlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches ist $2ab + bb$, um zu sehen, wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher ist b, finden könne. Hiebey bemerken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + bb$ also durch ein Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factores hat $2a + b$ und b, so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel gefunden, wenn man den Rest $2ab + bb$ durch $2a + b$ dividirt.

320.

Um also den zweyten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da denn der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu merken, daß $2a$ das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andere Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelassen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied $2a$ gesehen wird. So bald man aber den Quotient gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also, wodurch aus obigem Quadrat $aa + 2ab + bb$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 2ab + bb \;(a + b \\
 & aa \\
\hline
2a + b & + 2ab + bb \\
 & + 2ab + bb \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadratwurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wenn dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen; als:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 6ab + 9bb \;(a + 3b \\
 & aa \\
\hline
2a + 3b & + 6ab + 9bb \\
 & + 6ab + 9bb \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4aa - 4ab + bb \;(2a - b \\
 & 4aa \\
\hline
4a - b & - 4ab + bb \\
 & - 4ab + bb \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9pp + 24pq + 16qq)\; 3p + 4q \\
 & 9pp \\
\hline
6p + 4q & + 24pq + 16qq \\
 & + 24pq + 16qq \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25xx - 60x + 36)\; 5x - 6 \\
 & 25xx \\
\hline
10x - 6 & - 60x + 36 \\
 & - 60x + 36 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

323.

323.

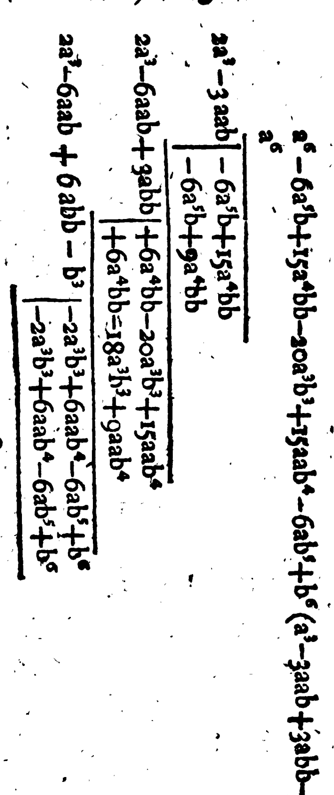
Wenn bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdenn werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen;

$$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \; (a + b - c$$
$$aa$$
$$2a + b \;|\; + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc$$
$$|\; + 2ab \qquad\qquad + bb$$
$$2a + 2b - c \;|\; - 2ac - 2bc + cc$$
$$|\; - 2ac - 2bc + cc$$

$$a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1 \; (aa + a + 1$$
$$a^4$$
$$2aa + a \;|\; + 2a^3 + 3aa$$
$$|\; + 2a^3 + aa$$
$$2aa + 2a + 1 \;|\; + 2aa + 2a + 1$$
$$|\; + 2aa + 2a + 1$$

$$a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \; (aa - 2ab - 2bb$$
$$a^4$$
$$2aa - 2ab \;|\; - 4a^3b + 8ab^3$$
$$|\; - 4a^3b + 4aabb$$
$$2aa - 4ab - 2bb \;|\; - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$$
$$|\; - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$$

$a^6 - 6a^5b$



324.

Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechenbüchern für die Ausziehung der Quadratwurzel gegeben wird; als:

```
 5|29|23,      17|64|42,      23|04|48,
 4|            16|            16|
----          -----           -----
43|129        82|164          88|704
  |129          |164            |704
  ----          ----            ----
     0             0               0

    40|96|64,        96|04|98,
    36|              81|
    ------           -----
   124|496          188|1504
      |496             |1504
      ----             -----
         0                 0

     1|56|25|125,     99|80|01|999,
     1|               81|
    -----             -----
    22|56            189|1880
      |44               |1701
    -----             -------
   245|1225         1989|17901
      |1225             |17901
      -----             ------
          0                  0
```

325.

Wenn aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen, daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist, und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzelzeichens, welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschlossen wird. Also wird die Quadratwurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{(aa+bb)}$; und $\sqrt{(1-xx)}$ deutet an die Quadratwurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzelzeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

Capitel

Capitel 8.

Von der Rechnung mit Irrationalzahlen.

326.

Wenn zwey oder mehr Irrationalformeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen schreibt. Nur ist bey dem Abkürzen zu bemerken, daß anstatt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ einander aufhebe, oder nichts gebe. Also diese Formel $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ zusammen addirt, giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$: ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9: ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction, indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müssen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, a giebt. Wenn aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit

$\sqrt{}b$ multiplicirt $\sqrt{}ab$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{}2 \\ 1+\sqrt{}2 \\ \hline 1+\sqrt{}2 \\ \quad +\sqrt{}2+2 \\ \hline 1+2\sqrt{}2+2=3+2\sqrt{}2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4+2\sqrt{}2 \\ 2-\sqrt{}2 \\ \hline 8+4\sqrt{}2 \\ \quad -4\sqrt{}2-4 \\ \hline 8-4=4. \end{array}$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu merken, daß $\sqrt{}-a$ mit $\sqrt{}-a$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wenn man den Cubus von $-1+\sqrt{}-3$ suchen sollte, so geschähe solches, wenn man erstlich das Quadrat nimmt, und dasselbe nochmals mit der Zahl $-1+\sqrt{}-3$ multipliciret, wie folgt

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{}-3 \\ -1+\sqrt{}-3 \\ \hline +1-\sqrt{}-3 \\ \quad -\sqrt{}-3-3 \\ \hline +1-2\sqrt{}-3-3= \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ -2-2\sqrt{}-3 \\ -1+\sqrt{}-3 \\ \hline +2+2\sqrt{}-3 \\ -2\sqrt{}-3+6 \\ \hline 2+6=8. \end{array}$$

330.

Bey der Division hat man nur nöthig, schlechtweg einen Bruch zu setzen, und alsdenn kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so, daß der Nenner rational wird. Denn, wenn der Nenner ist $a+\sqrt{}b$, und man oben und unten mit $a-\sqrt{}b$ multiplicirt, so wird der neue Nenner seyn $aa-b$, und hat also kein

kein Wurzelzeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$, so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

für den Nenner

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1, so bekommt man vor den Zähler $+\sqrt{2}+1$, und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; denn $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt, giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$

so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

331.

Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andere verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wenn man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{-2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$ ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}$ $=11+2\sqrt{30}$.

332.

332.

Wenn in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$: man multipliciret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Capitel 9.

Von den Cubis und von der Ausziehung der Cubicwurzel.

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$ nochmals mit $a+b$ multipliciren, da denn der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ \quad +aab+2abb+b^3 \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab+3abb$, welches so viel ist als $(3ab).(a+b)$: und dieses ist das dreyfache

fache Product der beyden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.

334.

Wenn also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regel leicht finden: als z. E. da die Zahl $5 = 3 + 2$, so ist der Cubus davon $= 27 + 8 + 18 . 5$ ist also $= 125$.

Es sey ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus seyn $343 + 27 + 63 . 10 = 1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000 + 216 + 540 . 36 = 46656.$$

335.

Wenn aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nämlich $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich, wenn der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Glied a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wenn man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3aab + 3abb + b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wissen, daß das zweyte Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa + 3ab + bb) . (b)$; wenn man also den Rest durch $3aa + 3ab + bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel, nämlich $+ b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genung, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$, oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andere Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß daher alsdenn zu $3aa$ noch hinzu fügen $3ab$, das ist, das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$a^3 + 12aa + 48a + 64 \;(a + 4$$
$$a^3$$

$3aa + 12a + 16$	$+ 12aa + 48a + 64$
	$+ 12aa + 48a + 64$
	0

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \;(aa - 2a + 1$$
$$a^6$$

$3a^4 - 6a^3 + 4aa$	$-6a^5 + 15a^4 - 20a^3$
	$-6a^5 + 12a^4 - 8a^3$
$3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1$	$3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$
	$3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$
	0

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regel, die Cubicwurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung also angestellet

```
          2197 (10 + 3 = 13
          1000
     300 | 1197
      90 |
       9 |
     399 | 1197
           0
```

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783, woraus die Cubicwurzel gefunden werden soll.

```
              34 965 783 (300 + 20 + 7 = 327
              27 000 000
     270000 |  7 965 783
      18000 |
        400 |
     288400 |  5 768 000
     307200 |  2 197 783
       6720 |
         49 |
     313969 |  2 197 783
                  0
```

Capitel 10.

Von den höhern Potestäten zusammengesetzter Größen.

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente, wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß

muß man die Wurzel, wenn sie zusammengesetzt ist, in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fünfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeiget werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgendergestalt gefunden.

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$a+b$$
$$\overline{aa+ab}$$
$$+ab+bb$$
$$\overline{(a+b)^2 = aa+2ab+bb}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^3+2aab+abb}$$
$$+aab+2abb+b^3$$
$$\overline{(a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^4+3a^3b+3aabb+ab^3}$$
$$+a^3b+3aabb+3ab^3+b^4$$
$$\overline{(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4}$$
$$+a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4+b^5$$
$$\overline{(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5}$$
$$a+b$$
$$\overline{a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+5aab^4+ab^5}$$
$$+a^5b+5a^4bb+10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6$$
$$\overline{(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6}$$

x.

342.

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel $a-b$ gefunden, welche von den vorigen nur darinn unterschieden sind, daß das 2te, 4te, 6te ꝛc. Glied das Zeichen minus bekömmt, wie aus folgendem zu ersehen.

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$aa-ab$$
$$-ab+bb$$
$$(a-b)^2 = aa-2ab+bb$$
$$a-b$$
$$a^3-2aab+abb$$
$$-aab+2abb-b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3aab+3abb-b^3$$
$$a-b$$
$$a^4-3a^3b+3aabb-ab^3$$
$$-a^3b+3aabb-3ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4$$
$$a-b$$
$$a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4$$
$$-a^4b+4a^3bb-6aab^3+4ab^4-b^5$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5$$
$$a-b$$
$$a^6-5a^5b+10a^3bb-10a^3b^3+5aab^4-ab^5$$
$$-a^5b+5a^4bb-10a^3b^3+10aab^4-3ab^5+b^6$$
$$(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6$$

ꝛc.

Hier bekommen nämlich alle ungerade Potestäten von b das Zeichen $-$, die geraden aber behalten das Zeichen $+$, wovon der Grund offenbar ist: denn da in der Wurzel $-b$ steht, so gehen die Potestäten davon folgen-

folgender Gestalt fort: $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, rc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen $+$, die ungeraden aber alle das Zeichen $-$ haben.

343.

Hier kömmt aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung wirklich fortzusetzen, alle Potestäten, sowohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu merken, daß, wenn man die Potestäten von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von $a-b$ entstehen, denn man darf nur die Zeichen der geraden Glieder, nämlich des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten rc. verändern. Es kömmt demnach hier darauf an, eine Regel fest zu setzen, nach welcher eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe, die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wenn man bey den oben gefundenen Potestäten, die Zahlen, so einem jedem Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genennet werden, so bemerket man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung, indem erstlich eben die Potestät von a vorkömmt, welche verlanget wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summe der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wenn man also die zehnte Potestät von $a+b$ verlanget, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,$$
$$a^1b^9,\ b^{10}.$$

345. Es

345.

Es muß also nur noch gezeiget werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll. Was zwar das erste Glied anbetrifft, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Glied ist der Coefficient allemal der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken, inzwischen, wenn diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Potest. I. - - Coefficienten	1, 1.
II. - - - -	1, 2, 1.
III. - - - -	1, 3, 3, 1.
IV. - - -	1, 4, 6, 4, 1.
V. - - -	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI. - - -	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII. - -	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII. - -	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX. -	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

2c.

Also wird von $a+b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu merken, daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müsse. Denn man setze $a=1$, und $b=1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $=1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müssen. Daher denn die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1 + 1 = 2 = 2^1$.
IIte $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.
IIIte $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.
IVte $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.
Vte $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.
VIte $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$.
VIIte $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$.
rc.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu merken, daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen: Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdienet noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regel gegeben werden soll; der Beweis aber davon wird in das folgende Capitel erspart werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät, als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

wo nämlich die Zähler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, rc. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander

einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also ist der erste Coefficient $= 1$, der 2te $= \frac{7}{1} = 7$, der 3te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$, der 4te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$, der 5te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} = 35$, der 6te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} = 21$, der 7te $= 21 \cdot \frac{1}{6} = 7$, der 8te $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{2}{1} = 2$, der 3te $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$; daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{3}{1} = 3$, der 3te $3 \cdot \frac{2}{2} = 3$, der 4te $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{4}{1} = 4$, der 3te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$, der 4te $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$, der 5te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1$.

350.

Diese Regel schaffet uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wissen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche $\frac{10}{1}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$. Daher bekömmt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$.

den 3ten $= 10 \cdot \frac{9}{2} = 45$, den 4ten $= 45 \cdot \frac{8}{3} = 120$,
den 5ten $= 120 \cdot \frac{7}{4} = 210$, den 6ten $= 210 \cdot \frac{6}{5} = 252$.
den 7ten $= 252 \cdot \frac{5}{6} = 210$, den 8ten $= 210 \cdot \frac{4}{7} = 120$.
den 9ten $= 120 \cdot \frac{3}{8} = 45$, den 10ten $= 45 \cdot \frac{2}{9} = 10$,
den 11ten $= 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben, ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät

stät von a + b, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn $(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1}a^{99}b + \frac{100.99}{1.2}a^{98}bb + \frac{100.99.98}{1.2.3}a^{97}b^3 + \frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}a^{96}b^4$ rc. woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbar zu ersehen.

Capitel II.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel beruhet.

352.

Wenn man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurücke geht, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so vielmal vorkömmt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen lassen: als bey der zweyten Potestät kömmt das Glied ab zweymal vor, weil man schreiben kann ab und ba: hingegen kömmt daselbst aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potestät kann das Glied aab auf dreyerley Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder aaab, auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb, hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That, wenn man erwäget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wenn die-

selbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wenn diese vier Factores mit einander multiplicirt werden I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, daher ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen, und so vielmal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen lassen, woraus sodann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an, zu wissen, wie vielmal eine gewisse Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Denn wenn alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten, als a^2, a^3, a^4 rc. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nämlich ab anfangen, wo offenbar zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu merken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da denn die zwey übrigen zweymal versetzt werden können. Wenn also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb: steht b zuerst, so hat man wieder zwey, bac, bca: und eben so viel, wenn c zuerst steht, cab, cba. Daher in allem die Zahl der Versetzungen seyn wird $3 \cdot 2 = 6$.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen

übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird 4. 6=24=4. 3. 2. 1.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben, und für jede lassen sich die vier übrigen 24mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen seyn wird 5. 24=120=5. 4. 3. 2. 1.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wenn dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen ganz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchst.	Anzahl der Versetz.
I.	1 = 1
II.	2. 1 = 2
III.	3. 2. 1 = 6
IV.	4. 3. 2. 1 = 24
V.	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

357.

Es ist aber wohl zu merken, daß diese Zahlen nur alsdenn statt finden, wenn alle Buchstaben unter sich ungleich sind, denn wenn zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer: und wenn gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen, wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müssen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich, so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Daher

 die

die obige Zahl auf die Hälfte gebracht, oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich, so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: daher die obigen Zahlen durch $6=3.2.1$ getheilt werden müssen. Eben so, wenn vier Buchstaben einander gleich sind, so müssen die obigen Zahlen durch 24, das ist, durch 4.3.2.1 getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie vielmal diese Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche, wenn sie ungleich wären, 6.5.4.3.2.1 Versetzungen zulassen würden. Weil aber hier a dreymal vorkommt, so muß diese Zahl durch 3.2.1, und weil b zweymal vorkommt, noch ferner durch 2.1 getheilt werden, daher die Anzahl der Versetzungen seyn wird $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7, welches nur einmal vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen 7.6.5.4.3.2.1, wenn sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Glied a^6b sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch 6.5.4.3.2.1 getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1}$.

Im dritten Glied a^5bb kommt a fünfmal und b zweymal vor, daher die obige Zahl erstlich durch 5.4.3.2.1 und noch durch 2.1 getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6.}{1.2.}$

Im vierten Glied a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; daher die obige Zahl erstlich durch 4.3.2.1 und hernach

hernach noch durch 3. 2. 1 oder 1. 2. 3 getheilt werden muß: da denn der Coefficient wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ und so weiter, wodurch die oben gegebene Regel erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter, und lehret, wie man auch von solchen Wurzeln, die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a + b + c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müssen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a + b + c)^3$ seyn.

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen, es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$, so wird der Cubus von $1+1+1$, das ist, von 3 seyn

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1$, $b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$, das ist, von 1 seyn

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$



Capitel 12.

Von der Entwickelung der Irrationalpotestäten durch unendliche Reihen.

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel a + b eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande, auf eine allgemeine Art die Potestät von a + b auszudrucken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regel finden

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$$
$$+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ ꝛc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel a — b nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten ꝛc. Gliedes verändern, woher man haben wird:

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$$
$$+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ ꝛc.}$$

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Denn da wir gezeigt haben, wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}} \text{ und}$$
$$\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

daher um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden, haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10},$$
$$\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}.$$ Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$ rc.

Oder man kann diese Potestäten von a auch also ausdrücken $a^n = \sqrt{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$, $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ rc.

364.

Dieses vorausgesetzt, wird die Quadratwurzel aus $a+b$ folgendergestalt ausgedrückt werden, $\sqrt{(a+b)} =$

$$\sqrt{a} + \tfrac{1}{2} b \frac{\sqrt{a}}{a} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\, bb \frac{\sqrt{a}}{aa} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\, b^3 \frac{\sqrt{a}}{a^3} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\, b^4 \frac{\sqrt{a}}{a^4}$$
rc.

365.

Wenn nun a eine Quadratzahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadratwurzel aus $a+b$, ohne Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wenn $a=cc$, so ist $\sqrt{a}=c$, und man wird haben

$$\sqrt{(cc+b)}=c+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{c}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{bb}{c^3}+\tfrac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5}-\tfrac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7}\ \text{etc.}$$

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadratwurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer ein Quadrat ist, welcher durch cc angedeutet wird. Will man z. E. die Quadratwurzel von 6 haben, so setzt man $6=4+2$, und da wird $cc=4$, $c=2$ und $b=2$, daher bekommt man $\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}$ etc. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder, so hat man $2\frac{7}{16}=\frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$.

Also wird $cc=\frac{25}{4}$, $c=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da denn kommt,

$$\sqrt{6}=\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{20}=\tfrac{49}{20},$$ wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, so wird $c=\frac{49}{20}$ und $b=-\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben $\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}$ $=\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$, wovon das Quadrat $=\frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6=\frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

367.

Eben so kann man auch die Cubicwurzel aus a + b durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Denn da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15} \text{ ꝛc.}$$

Für die Potestäten von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$,

$a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ ꝛc. daher erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9}.bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \frac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$$

ꝛc.

368.

Wenn also a ein Cubus, nämlich $a = c^3$, so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzelzeichen weg. Daher man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \frac{1}{3}.\frac{b}{cc} - \frac{1}{9}.\frac{bb}{c^5} + \frac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}} \text{ ꝛc.}$$

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubicwurzel von einer jeglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie $c^3 + b$, davon der erste ein Cubus ist.

Also, wenn man die Cubicwurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1 + 1$, da wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ ꝛc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man

setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{5} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$ also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solchergestalt kann man, wenn man will, immer näher kommen, insonderheit, wenn man mehr Glieder nehmen will.

Capitel 13.

Von der Entwickelung der negativen Potestäten.

370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} könne ausgedrückt werden, daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, also, daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potestät von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstrecket.

371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben; $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$ ꝛc. hernach für die Potestäten von a:

$a^n =$

$a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$ ꝛc.

Daher erhalten wir $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b}{a^6}$ ꝛc. welche eben diejenige Reihe ist, die schon oben durch die Division gefunden worden.

372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$, so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelöst werden. Man setze nämlich $n = -2$, so hat man erstlich für die Coefficienten, $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ ꝛc. und für die Potestäten von a hat man $a^n = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ ꝛc. daher erhalten wir $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{b}{a^3} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^4}$, $- \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{b^4}{a^6}$ ꝛc. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$ ꝛc. Also werden wir haben: $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$ ꝛc.

373.

Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist, für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn, $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$,

$\frac{n-2}{3}$

$\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ rc. für die Potestät von a aber $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ rc. Woraus wir erhalten $\frac{1}{(a+b)^3}$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ rc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}} \text{ rc.}$$

Laßt uns ferner setzen $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ rc. für die Potestäten von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$ $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ rc. Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ rc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ rc.}$$

374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jegliche dergleichen negative Potestät auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ rc.}$$

Aus

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch so gar für m Brüche annehmen kann, um irrationale Formeln auszudrücken.

375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ ꝛc.}$$

So wollen wir diese Reihe mit $a + b$ multipliciren, weil alsdenn die Zahl heraus kommen muß 1. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ ꝛc.}$$
$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{aa} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ ꝛc.}$$
$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{aa} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ ꝛc.}$$

Product 1 wie nothwendig folgen muß.

376.

Da wir ferner gefunden haben $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ ꝛc. wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, so muß ebenfalls 1 heraus kommen. Es ist aber $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen

$\frac{1}{aa}$

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ ꝛc.}$$
$$aa + 2ab + bb$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ ꝛc.}$$
$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4bb}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ ꝛc.}$$
$$+ \frac{bb}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ ꝛc.}$$

Product 1 wie die Natur der Sache erfordert.

377.

Sollte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit a+b multipliciren, so müßte $\frac{1}{a+b}$ heraus kommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ ꝛc. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ ꝛc.}$$
$$a + b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3bb}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ ꝛc.}$$
$$+ \frac{b}{a^2} - \frac{2bb}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ ꝛc.}$$

Ende des zweyten Abschnitts.

Des
Ersten Theils
Dritter Abschnitt.
Von
den Verhältnissen und Proportionen.



Des

Ersten Theils

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Capitel I.

Von der arithmetischen Verhältniß, oder dem Unterscheid zwischen zweyen Zahlen.

378.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder einander ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wenn man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dies auf zweyerley Weise geschehen; denn entweder fragt man, um wie viel die eine größer sey als die andere? oder man fragt, wie vielmal die eine größer sey als die andere? Beyderley Bestimmung wird ein Verhältniß genennt, und die erstere pflegt eine arithmetische Verhältniß, die lestere aber eine geometrische genennt zu werden. Welche Benennungen aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft haben, sondern willkührlich eingeführt worden sind.

379.

Es versteht sich hier von selbst, daß die Größen einerley Art seyn müssen, weil sonst nichts von ihrer Gleichheit, oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Denn es würde ungereimt seyn, wenn einer z. E. fragen wollte, ob 2 ℔ und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Daher ist hier allenthalben von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselbe immer durch Zahlen anzeigen lassen, so wird, wie schon anfänglich gemeldet worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

380.

Wenn also von zwey Zahlen gefragt wird, um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun solches geschiehet, wenn man den Unterscheid zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anders als der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen. Welches letztere Wort (Unterscheid) füglicher gebraucht wird, so, daß das Wort Verhältniß nur allein bey den sogenannten geometrischen Verhältnissen beybehalten wird.

381.

Der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt, und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage, um wie viel die eine größer sey als die andere. Wenn also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterscheid nichts oder Null, und wenn man fragt, um wie viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z. E. $6 = 2.3$, so ist der Unterscheid zwischen 6 und 2.3 nichts.

382.

382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich, als 5 und 3, und man fragt, um wie viel 5 größer sey als 3, so ist die Antwort, um 2; welche gefunden wird, wenn man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383.

Hier kommen also drey Sachen zu betrachten vor; erstlich, die größere Zahl, zweytens, die kleinere, und drittens, der Unterscheid, welche unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben die dritte finden kann. Es sey die größere $= a$, die kleinere $= b$, und der Unterscheid, welcher auch die Differenz genennt wird, $= d$: so wird der Unterscheid d gefunden, wenn man b von a subtrahirt, also, daß $d = a - b$; woraus erhellet, wie man, wenn a und b gegeben sind, d finden soll.

384.

Wenn aber die kleinere Zahl b, nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wenn man den Unterscheid zu der kleinern Zahl addirt, daher bekommt man die größere $a = b + d$. Denn wenn man von $b + d$ die kleinere b abzieht, so bleibt übrig d, welches der vorgegebene Unterscheid ist. Gesetzt, die kleinere Zahl sey 12, und der Unterscheid 8, so wird die größere seyn $= 20$.

385.

Wenn aber die größere Zahl a nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wenn man den Unterscheid von der größeren Zahl subtrahirt. Daher bekommt man $b = a - d$. Denn wenn ich diese

Zahl a - d von der grösseren a subtrahire, so bleibt übrig d, welches der gegebene Unterscheid ist.

386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält. Erstens hat man $d = a - b$, 2tens $a = b + d$, und 3tens $b = a - d$, und wenn von diesen drey Vergleichungen eine wahr ist, so sind auch die beyden andern nothwendig wahr. Wenn daher überhaupt $z = x + y$, so ist auch nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

387.

Bey einem solchen arithmetischen Verhältniß ist zu merken, daß, wenn zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterscheid eben derselbe bleibet. Also, wenn d der Unterscheid ist zwischen a und b, so ist auch d der Unterscheid zwischen den beyden Zahlen $a + c$ und $b + c$, und auch zwischen $a - c$ und $b - c$. Da z. E. zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterscheid 8 ist, so bleibt auch dieser Unterscheid, wenn man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder subtrahirt.

388.

Der Beweis hievon ist offenbar. Denn wenn $a - b = d$ so ist auch $(a + c) - (b + c) = d$. Eben so wird auch seyn $(a - c) - (b - c) = d$.

389.

Wenn die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterscheid zweymal so groß. Wenn also $a - b = d$, so wird seyn $2a - 2b = 2d$; und allgemein wird man haben $na - nb = nd$, was man auch immer vor eine Zahl für n annimmt.

Capitel

Capitel 2.

Von den arithmetischen Proportionen.

390.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine arithmetische Proportion genennt.

Also, wenn $a-b=d$ und auch $p-q=d$, so, daß der Unterscheid zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a-b=p-q$, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterscheid zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müssen, daß, wenn man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wenn man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine arithmetische Proportion aus, weil $12-7=9-4$.

392.

Wenn man eine arithmetische Proportion hat, als $a-b=p-q$, so lassen sich darinn das zweyte und dritte Glied verwechseln, und es wird auch seyn $a-p=b-q$. Denn da $a-b=p-q$, so addire man erstlich beyderseits b, und da hat man $a=b+p-q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a-p=b-q$.

Da also $12-7=9-4$, so ist auch $12-9=7-4$.

393.

In einer jeglichen arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Denn wenn $a-b=p-q$, so ist auch $b-a=q-p$. Denn $b-a$ ist das Negative von $a-b$, und eben so ist auch $q-p$ das Negative von $p-q$. Da nun $12-7=9-4$, so ist auch $7-12=4-9$.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen arithmetischen Proportion diese Haupteigenschaft wohl zu bemerken, daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes immer eben so groß sey, als die Summe des ersten und vierten Gliedes. Welches auch also ausgesprochen wird, daß die Summe der mittlern Glieder so groß sey als die Summe der äußern. Also da $12-7=9-4$, so ist $7+9=12+4$, denn jedes macht 16.

395.

Um diese Haupteigenschaft zu beweisen, so sey $a-b=p-q$: man addire beyderseits $b+q$, so bekommt man $a+q=b+p$, das ist die Summe des ersten und ist gleich der Summe des zweyten und dritten. Hinwiederum auch, wenn vier Zahlen als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summe der zweyten und dritten so groß ist als die Summe der ersten und vierten, nämlich, daß $b+p=a+q$, so sind dieselben Zahlen gewiß in einer arithmetischen Proportion, und es wird seyn $a-b=p-q$. Denn da $a+q=b+p$, so subtrahire man beyderseits $b+q$, und da bekommt man $a-b=p-q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summe der mittlern $13+15=28$ der Summe der äußern $18+10=28$ gleich sind, so sind dieselben auch gewiß in einer arithmetischen Proportion, und folglich $18-13=15-10$.

396.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wenn von einer arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder a, b, p, und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a+q=b+p$: Nun subtrahire man beyderseits a, so bekommt man $q=b+p-a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man das zweyte und dritte zusammen addirt, und von der Summe das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summe des zweyten und dritten $=41$, davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die arithmetische Proportion wird seyn $19-28=13-22$, oder $28-19=22-13$, oder $28-22=19-13$.

397.

Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andere weniger der dritten, oder daß der Unterscheid zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterscheid zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19-15=15-11$.

398.

Solche drey Zahlen schreiten in einer arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wenn die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fällt, wenn die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer arithmetischen Progression, so muß seyn $a-b=b-c$, woraus folget,

nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summe $2b = a + c$. Nimmt man beyderseits a weg, so bekommt man $c = 2b - a$.

400.

Wenn also von einer arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als a, b, so wird daraus das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt, und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder einer arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn $= 2.3 - 1 = 5$, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

Man kann nach dieser Regel weiter fortschreiten, und wie man aus dem ersten und zweyten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solchergestalt die arithmetische Progression fortsetzen, so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ ꝛc.

Capitel 3.

Von den arithmetischen Progressionen.

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine arithmetische Progression genennt.

Also

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 2c. eine arithmetische Progression, weil dieselben immer um eins steigen, und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 2c. ist auch eine arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterscheid genennt. Wenn also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die arithmetische Progression, so weit man will, fortsetzen. Es sey z. E. das erste Glied = 2, und die Differenz = 3, so wird die steigende Progression seyn:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 2c.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wenn man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 2c. zu schreiben, damit man so gleich sehen könne, das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genennt, das obige Exempel kömmt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29 2c.

woraus man sieht, daß 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz, so wird die arithmetische Progression also zu stehen kommen:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$ 2c.

woraus so gleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wissen, und dieses bloß allein aus dem ersten Glied a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn $=a+9d$, das 100te $=a+99d$, und auf eine allgemeine Art wird das $n$te Glied seyn $a+(n-1)d$.

406.

Wenn die arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemerken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $=a$, die Differenz $=d$ und die Anzahl der Glieder $=n$, so ist das letzte Glied $=a+(n-1)d$. Dasselbe wird also gefunden, wenn man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste $=4$ und die Differenz $=3$, so wird das letzte Glied seyn $99.3+4=301$.

407.

Hat man das erste Glied $=a$ und das letzte $=z$ nebst der Anzahl der Glieder $=n$, so kann man daraus die Differenz $=d$ finden. Denn da das letzte Glied ist $z=a+(n-1)d$, so subtrahire man beyderseits a, so hat man $z-a=(n-1)d$. Wenn man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z-a$ ist das Product von $(n-1)$ in d. Man darf also nur $z-a$ durch $n-1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d=\frac{z-a}{n-1}$, woraus diese Regel entspringt. Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger

weniger eins, so bekommt man die Differenz: woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren, und den Rest 24 durch 9−1, das ist, durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz = 3, und die Progression selbst wird seyn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; woraus die verlangte Progression seyn wird:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$, und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$; folglich wird die Progression seyn:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36}, & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

409.

Wenn ferner das erste Glied a und das letzte z, sammt der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Denn da z−a

=(n−1)

$= (n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d, und da bekommt man $\frac{z-a}{d} = n-1$. Da nun n um eins größer ist als $n-1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wenn man den Unterscheid zwischen dem ersten und letzten Glied $z-a$ durch die Differenz dividiret, und zum Quotient $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied $=4$, das letzte $=100$, und die Differenz $=12$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12} + 1 = 9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Es sey das erste Glied $=2$, das letzte $=6$, und die Differenz $=1\frac{1}{3}$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Es sey ferner das erste Glied $=3\frac{1}{3}$, das letzte $=7\frac{2}{3}$, und die Differenz $=1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{7}{9}$,	$6\frac{2}{9}$,	$7\frac{2}{3}$.

410.

Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl seyn muß. Wenn man

man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wenn folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde, so liesse sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Daher muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z-a$ durch d theilen lassen.

411.

Bey einer jeden arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß, wenn drey derselben bekannt, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wenn a, d und n bekannt sind, so hat man $z = a + (n-1)d$.

II. Wenn z, d und n bekannt sind, so hat man $a = z - (n-1)d$.

III. Wenn a, z und n bekannt sind, so hat man $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Wenn a, z und d bekannt sind, so hat man $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

Capitel 4.

Von der Summation der arithmetischen Progressionen.

412.

Wenn eine arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summe derselben zu suchen, welche gefunden wird, wenn man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig

seyn

seyn würde, wenn die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied $=2$, die Differenz $=3$, das letzte Glied $=29$, und die Anzahl der Glieder $=10$ ist.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes $=31$, die Summe des zweyten und letzten ohne eins $=31$, die Summe des dritten und letzten ohne zwey $=31$, die Summe des vierten und letzten ohne drey $=31$, und so ferner, woraus man sieht, daß immer zwey Glieder, die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fällt auch so gleich in die Augen. Denn wenn das erste Glied gesetzt wird $=a$, und das letzte $=z$, die Differenz aber $=d$, so ist die Summe des ersten und letzten $=a+z$. Hernach ist das zweyte Glied $a+d$, und das letzte ohne eins $=z-d$, welche zusammen genommen machen $a+z$. Ferner ist das dritte Glied $a+2d$, und das letzte ohne zwey $=z-2d$, welche zusammen betragen $a+z$. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summe der obigen Progression zu finden, nämlich von $2+5+8+11+14+17+20+23+26+29$, so schreibe man darunter eben diese Progression rückwärts, und addire Glied vor Glied, wie folget

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbar zweymal so groß ist als die Summe unserer Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summe = 10. 31 = 310. Da nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Progression, so wird die rechte Summe seyn = 155.

416.

Wenn man auf diese Art mit einer jeglichen arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied = a, das letzte = z, und die Anzahl der Glieder = n, indem man eben dieselbe Progression rückwärts darunter schreibt, und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a + z$, deren Anzahl = n, folglich ist die Summe derselben = $n(a + z)$, welche zweymal so groß ist, als die Summe der Progression, daher ist die Summe der arithmetischen Progression selbst = $\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regel, um die Summe einer jeglichen arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summe der ganzen Progression anzeigen.

Oder,

Oder, welches auf eins läuft: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch, man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summe der ganzen Progression.

418.

Es ist nöthig, diese Regel mit einigen Exempeln zu erläutern. Es sey demnach gegeben die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summe gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regel seyn $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlaguhr in 12 Stunden thue? zu diesem Ende müssen die Zahlen 1, 2, 3, bis 12, zusammen addirt werden, die Summe wird also seyn $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Wollte man die Summe von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wissen, so würde dieselbe heraus kommen 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe seyn = 50005000.

419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung; für den ersten Hufnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu stehen?

Hier wird also die Summe von einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = 32 ist, gesuchet.

Hier

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regel gefunden wird $= 5 + 31 . 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $\frac{103 . 32}{2} = 103 . 16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe der ganzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $= a + (n - 1)d$, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n - 1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na + n(n - 1)d$, daher die gesuchte Summe seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Exempel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, so erhält man die Summe $5 . 32 + \frac{31 . 32 . 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

421.

Wenn die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summe zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe gefunden wird $\frac{nn + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n = 1766$, so wird die Summe aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $= 883 . 1767 = 1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 rc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summe verlangt wird:

Hier ist nun das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, die Anzahl der Glieder $= n$; daraus wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1) 2 = 2n - 1$, daraus erhält man die gesuchte Summe $= nn$.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summe immer ein Quadrat, nämlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	ꝛc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19	ꝛc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100	ꝛc.

423.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 3$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 ꝛc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1 + (n-1) 3 = 3n - 2$; daher die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 3n - 1$; folglich die Summe der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n = 20$, so ist die Summe $= 10 . 59 = 590$.

424.

Es sey das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1) d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n-1) d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n + n(n-1) d$, woher die Summe der Progression seyn wird $n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Hier

Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen,

wenn $d = 1$, so ist die Summe — $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$

$d = 2$ — — — — — $n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$

$d = 3$ — — — — — $n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$

$d = 4$ — — — — — $n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn - n$

$d = 5$ — — — — — $n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$

$d = 6$ — — — — — $n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn - 2n$

$d = 7$ — — — — — $n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$

$d = 8$ — — — — — $n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn - 3n$

$d = 9$ — — — — — $n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$

$d = 10$ — — — — — $n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn - 4n$

2c.

Capitel 5.

Von den figurirten oder vieleckigten Zahlen.

425.

Die Summation der arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen, und deren Differenz entweder 1, oder 2, oder 3, oder eine andere beliebige ganze

 Zahl

Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

Setzt man die Differenz =1, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese arithmetische Progression = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ꝛc. Nimmt man nun in derselben die Summe von einem, zweyen, dreyen, vieren ꝛc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 ꝛc.

Also, daß 1=1, 3=1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4 ꝛc. Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich, so viel Punkte als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreyeck vorstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen,

1. 3. 6. 10. 15.

21. 28.

ꝛc.

427.

427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man, wie viel Punkte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur eines, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genennt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechtweg ein Dreyeck genennt wird, folgender Gestalt:

Seite

Dreyeck

Seite

Dreyeck

428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann:

Denn es sey die Seite $= n$, so wird das Dreyeck seyn $1+2+3+4+\ldots n$, deren Summe $= \frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n=1$, so wird das Dreyeck $=1$.

Ist $n=2$, so ist das Dreyeck $= 3$.
$n=3$ — — — — $= 6$.
$n=4$ — — — — $= 10$. und so fort.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreyeck $= 5050$ ꝛc.

429.

Diese Formel $\frac{m+n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreyeckigte Zahlen genennet: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zu Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n+1$ eine gerade Zahl ist, und sich durch 2 theilen läßt.

Also, wenn $n = 12$, so ist das Dreyeck $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreyeck $= \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$. ꝛc.

430.

Setzt man die Differenz $= 2$, so hat man diese arithmetische Progression

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ꝛc.

wovon die Summen diese Reihe ausmachen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 ꝛc.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genennt werden, und eben diejenige sind, welche oben Quadrate genennet worden; Es lassen sich nämlich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:

```
1,   4,     9,        16,          25,
•   • •   • • •   • • • •   • • • • •
    • •   • • •   • • • •   • • • • •
          • • •   • • • •   • • • • •
                  • • • •   • • • • •
                            • • • • •
```

36,

36, 49.

431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber, wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 ꝛc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden $= nn$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz $= 3$, und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genennt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so net durch Punkte vorstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
Arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176 ꝛc.

und der Zeiger weiset die Seite einer jeglichen.

433.

Wenn also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl $= \frac{3nn - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wenn z. E. $n = 7$, so

ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$, und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz $= 4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl $= 2nn - n = n(2n-1)$, wobey zu merken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Denn wenn man in diese immer eine überspringt, so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die Generalformeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird seyn

$$\text{das Dreyeck} = \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Viereck} = \frac{2nn+0n}{2} = nn$$

$$\text{Veck} = \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\text{VIeck} = \frac{4nn-2n}{2} = 2nn - n = n(2n-1)$$

$$\text{VIIeck} = \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$$

VIIIeck

$$\text{VIIIeck} = \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$$

$$\text{IXeck} = \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$$

$$\text{Xeck} = \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$$

$$\text{XIeck} = \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$$

$$\text{XIIeck} = \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$$

$$\text{XXeck} = \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$$

$$\text{XXVeck} = \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$$

$$m\text{eck} = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$$

437.

Wenn also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckigte Zahl $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckigte Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die zweyeckigte Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ seyn.

Setzt man $m = 3$, so wird die IIIeckigte Zahl $= \frac{nn+n}{2}$

Setzt man $m = 4$, so wird die IVeckigte Zahl $= nn$ ꝛc.

438.

Um diese Regel mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXVeckigte Zahl, deren Seite 36 ist?

Man suche erstlich vor die Seite n die XXVeckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn-21n}{2}$. Nun setze man $n=36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $=14526$.

439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel, die er dafür bezahlet, sey die 365eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden, so wird $m=365$, und also das 365eck von $n = \frac{363nn-361n}{2}$. Nun ist $n=12$, woraus der gesuchte Preiß des Hauses seyn wird, 23970 Rubel.

Capitel 6.

Von dem geometrischen Verhältniß.

440.

Das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, da denn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem geometrischen Verhältniß drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vorsatz

satz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennt wird. Drittens, die Benennung des Verhältnisses, welche gefunden wird, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt: als wenn zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz, und die Benennung wird seyn $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12 einmal und noch $\frac{1}{2}$mal in sich begreiffe.

442.

Um das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punkte, welche zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also $a:b$ zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerkt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß: dieses Zeichen wird also mit Worten ausgesprochen; a verhält sich zu b, oder schlechtweg a zu b.

443.

Die Benennung eines solchen Verhältnisses wird demnach durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zähler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschicht, wenn man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ ist gebracht worden, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444.

Die Verhältnisse sind also nur in so fern unterschieden, als ihre Benennung verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnissen, als verschiedene Benennungen gefunden werden können.

Die erste Art ist nun unstreitig, wenn die Benennung 1 wird; und dieses geschieht, wenn die beyden Zahlen gleich sind, als 3:3, 4:4, a:a, wovon die Benennung 1 wird, und deswegen das Verhältniß der Gleichheit genennt wird.

Hierauf folgen diejenigen, deren Benennung eine ganze Zahl wird, als 4:2, wo die Benennung 2 ist. Ferner 12:4, wo die Benennung 3 ist, und 24:6, wo die Benennung 4 ist ꝛc.

Hernach kommen solche vor, deren Benennung durch Brüche ausgedrückt werden. Als 12:9, dessen Benennung $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist: 18:27, dessen Benennung $\frac{2}{3}$ ist ꝛc.

445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz, und die Benennung d, so haben wir schon gesehen, daß wenn a und b gegeben, daraus gefunden werde $d = \frac{a}{b}$.

Ist aber der Nachsatz b nebst der Benennung d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt, d giebt, endlich, wenn der Vorsatz a nebst der Benennung d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Denn wenn man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{b}$ dividiret, so ist der Quotus d, das ist die Benennung.

446.

Ein jedes Verhältniß a:b bleibt unverändert, wenn man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl, entweder multiplicirt, oder dividirt, weil die Benennung einerley bleibt. Denn wenn d die Benennung von a:b ist, also, daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß na : nb die Benennung $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist die Benennung gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

447.

Wenn die Benennung in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nämlich, wenn die Benennung auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man; a:b = p:q, das ist, mit Worten a zu b, wie p zu q. Also, da von diesem Verhältniß 6:3 die Benennung $\frac{2}{1}$ ist, oder 2, so hat man 6:3 = 2:1. Eben so sagt man, 18 : 12 = 3 : 2 und 24 : 18 = 4 : 3, und ferner 30 : 45 = 2 : 3. Läßt sich aber die Benennung nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: denn wenn man sagt 9:7 = 9:7, so wird es nicht begreiflicher.

448.

Wenn sich aber die Benennung auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wenn man sagt, 288 : 144 = 2 : 1, so ist die Sache ganz deutlich, und, wenn man fragt,

wie

wie sich 105:70 verhalte, so antwortet man, wie 3:2. Fragt man weiter, wie sich 576:252 verhalte, so antwortet man, wie 16:7.

449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste vorzustellen, so muß man die Benennung desselben auf die geringste Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wenn die beyden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinen Theiler dividiret werden. Also das Verhältniß 576:252 wird auf einmal zu diesem 16:7 gebracht, wenn man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeiner Theiler ist, dividiret.

450.

Weil nun die Sache darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

Capitel 7.

Von dem größten gemeinen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine leichtere Form bringen.

Also

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ungeachtet eine jede vor sich ihre besondere Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48 : 35 nicht leichter ausgedrückt werden, denn ob gleich sich beyde durch 1 theilen lassen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452.

Wenn aber die Zahlen einen gemeinen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeine Theiler durch folgende Regel gefunden.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier überbleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange bis die Division aufgeht; da denn der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzte Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

```
252|576|2
   |504|
   -----
     72|252|3
       |216|
       -----
         36|72|2
           |72|
           ----
             0
```

Hier ist also der größte gemeine Theiler 36.

453.

Es wird dienlich seyn, diese Regel durch einige Exempel zu erläutern. Man suche demnach den größten gemeinen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312

312 | 504 | 1
    | 312 |
192 | 312 | 1
    | 192 |
120 | 192 | 1
    | 120 |
72 | 120 | 1
   | 72 |
48 | 72 | 1
   | 48 |
24 | 48 | 2
   | 48 |
0

Also ist 24 der größte gemeine Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504:312 auf diese Form 21:13 bringen.

454.

Es seyn ferner diese zwey Zahlen gegeben 625:529, für welche der größte gemeine Theiler gesucht werden soll:

529 | 625 | 1
    | 529 |
96 | 529 | 5
   | 480 |
49 | 96 | 1
   | 49 |
47 | 49 | 1
   | 47 |
2 | 47 | 23
  | 46 |
1 | 2 | 2
  | 2 |
0

Hier

Hier ist also der größte gemeine Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen: oder dasselbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

455.

Es ist nun noch nöthig, den Beweis von dieser Regel zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere von den gegebenen Zahlen, d aber ein gemeiner Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch $a-b$ dadurch theilen lassen, auch $a-2b$ und $a-3b$, und überhaupt $a-nb$.

456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wenn die Zahlen b und $a-nb$ sich durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Denn da sich nb theilen läßt, so würde sich $a-nb$ nicht theilen lassen, wenn sich nicht auch a theilen ließe.

457.

Ferner ist zu merken, daß, wenn d der größte gemeine Theiler von den beyden Zahlen b und $a-nb$ ist, derselbe auch der größte gemeine Theiler von den Zahlen a und b seyn werde. Denn wenn für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeiner Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeiner Theiler von b und $a-nb$, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeine Theiler von b und $a-nb$; also muß auch d der größte gemeine Theiler von a und b seyn.

458.

Diese drey Sätze voraus gesetzt, so laßt uns die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regel befiehlt, theilen, und für den Quotus n annehmen, so erhält man den Rest $a-nb$, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest $a-nb$ mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinen Theiler hat als die gege-

bene Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest a−nb, und da wird wiederum der heraus kommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinen Theiler haben, und so immer weiter.

459.

Man fährt aber solcher Gestalt fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht, oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey demnach p der letzte Divisor, welcher just etlichemal in seinem Dividend enthalten ist, daher das Dividend durch p theilbar, und folglich diese Form mp haben wird; diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regel ist.

460.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen, und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da denn die Rechnung, wie folget, zu stehen kommen wird

```
1728 | 2304 | 1
     | 1728 |
     ---------
       576 | 1728 | 3
           | 1728 |
           --------
                0
```

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß 1728:2304 wird auf dieses gebracht 3:4; folglich verhält sich 1728:2304 eben so wie 3:4.

Capitel 8.

Von den geometrischen Proportionen.

461.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Benennungen einander gleich sind: und die Gleichheit zweyer solchen Verhältnisse wird eine geometrische Proportion genennt, welche also geschrieben wird, $a:b=c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4=12:6$. Denn von dem Verhältniß $8:4$ ist die Benennung $\frac{2}{1}$, und ebenfalls ist sie es auch von dem Verhältniß $12:6$.

462.

Wenn also $a:b=c:d$ eine geometrische Proportion ist, so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden, und folglich $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ seyn; und hinwiederum, wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b=c:d$.

463.

Eine geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupteigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darinn besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied immer eben so groß ist,

als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer, daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Glieder.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b=c:d$ eine geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a=\frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt man $ad=bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder, und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wenn hinwiederum vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad gleich ist dem Product der mittlern bc, so stehen dieselben in einer geometrischen Proportion. Denn da $ad=bc$, so dividire man beyderseits durch bd, da bekommt man $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; daher wird $a:b=c:d$.

466.

Die vier Glieder einer geometrischen Proportion als $a:b=c:d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so, daß die Proportion bleibt. Es kommt nämlich nur darauf an, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder, daß $ad=bc$. Also wird man haben, erstlich $b:a=d:c$, zweytens $a:c=b:d$, drittens $d:b=c:a$, viertens $d:c=b:a$.

467.

Außer diesen lassen sich auch noch viele andere geometrische Proportionen herleiten. Denn wenn $a:b=c:d$ so ist erstlich $a+b:a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c+d:c$, oder das dritte + dem vierten zum dritten; nämlich $a+b:a=c+d:c$.

Hernach ist auch das erste − dem andern zum ersten, wie das dritte − dem vierten zum dritten; oder $a-b:a=c-d:c$.

Denn nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac-bc=ac-ad$, weil $ad=bc$. Ferner wird auch $a-b:b=c-d:d$, weil $ad-bd=bc-bd$ und $ad=bc$ ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen, die aus $a:b=c:d$ entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden $ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd$. Denn das Product der äußern Glieder ist $mpac+npbc+mqad+nqbd$, oder weil $ad=bc$, so wird dasselbe $mpac+npbc+mqbc+nqbd$; das Product der mittlern Glieder aber ist $mpac+mqbc+npad+nqbd$, oder weil $ad=bc$, so wird dasselbe $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. $6:3=10:5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen:

$3:6=5:10$, $6:10=3:5$, $9:6=15:10$,
$3:3=5:5$, $9:15=3:5$, $9:3=15:5$,

470.

Da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern dem Product der mittlern Glieder gleich ist,

 so

so kann man, wenn die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyn die drey ersten Glieder 24:15=40 zu .... Denn da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten, das ist, mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Daher ist die Proportion 24:15=40:25. Und wenn allgemein die drey ersten Glieder a:b=c:... sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da ad=bc seyn muß, so dividire man beyderseits durch a, und man wird bekommen $d=\frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $=\frac{bc}{a}$, und wird gefunden, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, und das Product durch das erste Glied dividirt.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund, der in allen Rechenbüchern so berühmten Regel detri, weil darinn aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, also, daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemerken vor: als wenn zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen a:b=c:d und a:f=c:g, so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nämlich verhalten b:d =f:g; denn da aus der ersten folgt a:c=b:d, und aus der andern a:c=f:g, so sind die Verhältnisse b:d und f:g einander gleich, weil ein jedes dem Verhältnisse a:c gleich

gleich ist. Also da 5 : 100 = 2 : 40 und 5 : 15 = 2 : 6, so folgt daraus, daß 100 : 40 = 15 : 6.

473.

Wenn aber zwey Proportionen so beschaffen sind, daß sich einerley mittlere Glieder darinn befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten, wie die vierten. Wenn nämlich a : b = c : d und f : b = c : g, so wird daraus folgen a : f = g : d. Es sey z. E. diese Proportion gegeben 24 : 8 = 9 : 3 und 6 : 8 = 9 : 12, so wird daraus folgen 24 : 6 = 12 : 3. Der Grund davon ist offenbar: weil die erste giebt ad = bc, und die zweyte fg = bc, folglich wird ad = fg, und a : f = g : d, oder a : g = f : d.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wenn man besonders die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen a : b = c : d und e : f = g : h entstehet durch die Zusammensetzung diese ae : bf = cg : dh. Denn da erstlich ad = bc und aus der zweyten eh = fg, so wird auch seyn adeh = bcfg. Nun aber ist adeh das Product der äußern und bcfg das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

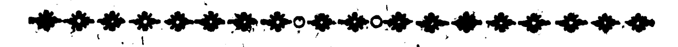
475.

Es seyn z. E. diese zwey Proportionen gegeben 6 : 4 = 15 : 10 und 9 : 12 = 15 : 20, so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion:

6 . 9 : 4 . 12 = 15 . 15 : 10 . 20
das ist 54 : 48 = 225 : 200
oder 9 : 8 = 9 : 8

476.

Zuletzt ist hier noch zu merken, daß wenn zwey Producte einander gleich sind, als ad = bc, daraus hinwiederum eine geometrische Proportion formiret werden kann. Es ist nämlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nämlich seyn a : c = b : d. Da z. E. 3.8 = 4.6, so folgt daraus diese Proportion 8 : 4 = 6 : 3, oder 3 : 4 = 6 : 8; und da 3. 5 = 1. 15, so bekommt man 3 : 15 = 1 : 5, oder 5 : 1 = 15 : 3, oder 3 : 1 = 15 : 5.



Capitel 9.

Anmerkungen über die Proportionen und ihren Nutzen.

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preiße und Waaren sind einander immer proportional, und bey den verschiedenen Geldsorten kommt alles darauf an, die Verhältnisse darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn, um die vorgetragene Lehre besser zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münzsorten z. E. einem Louisd'or und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen, wie viel diese Stücke nach einerley Münzsorte gelten. Also, da in Berlin ein Louisd'or 5 Rthl. 8 Gl., ein Ducaten aber 3 Rthl. gilt, so

so darf man diese beyden Werthe nur auf einerley Münze bringen, entweder auf Thaler, und da bekommt man diese Proportion, 1 L. : 1 D. = $5\frac{1}{3}$ Rthl. : 3 Rthl. d. i. wie 16 : 9. Oder in Groschen hat man diese Proportion 1 L. : 1 D. = 128 : 72 = 16 : 9, und aus einer solchen Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louisd'ors und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder giebt 9 Louisd'or = 16 Ducaten; und durch Hülfe dieser Vergleichung kann man eine jede Summe Louisd'or in Ducaten verwandeln. Also, wenn man gefragt wird, wie viel 1000 Louisd'or in Ducaten betragen, so macht man diese Regel detri. 9 L'd'or thun 16 Ducat. was 1000 L'd'or: Antwort; $1777\frac{7}{9}$ Ducaten.

Fragt man aber, wie viel 1000 Duc. in L'd'or betragen, so setzt man diese Regel detri; 16 Duc. thun 9 L'd'or, was 1000. Antwort; $562\frac{1}{2}$ L'd'or.

479.

Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich, und beruhet auf den Wechselcours, wodurch der Werth eines Rubels in holländische Stüber bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wenn also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion, 1 Rbl. : 1 D. = 45 : 105 = 3 : 7, und daher diese Vergleichung; 7 Rbl. = 3 Duc. Hieraus kann man finden, wie viel ein Ducaten in Rubeln betrage: denn 3 D. : 7 Rbl. = 1 D. : ... Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber, so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = 50 : 105 = 10 : 21, und daher diese Vergleichung 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rubl. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rbl. : 1 Duc. = 44 : 105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

480.

Hieraus kann man auch mehr als zwey verschiedene Münzsorten unter sich vergleichen, welches insonderheit bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Exempel zu geben, so soll jemand von hier 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und will wissen, wie viel solches in Berlin in Ducaten betragen werde. Es ist aber der hiesige Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (nämlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber Holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. Holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. Holl. machen einen Species Rthl. Holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist, für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthlr. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Rthlr.

481.

Um diese Frage aufzulösen, so wollen wir erstlich Schritt vor Schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stüb. so setzt man, 2 Rbl. : 95 Stüb. = 1000 ... Antwort 47500 Stüb. Ferner gehen wir weiter, und setzen 20 Stüb. : 1 Fl. = 47500 Stüber : .... Antwort 2375 Fl.

Ferner, da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Sp. Rthl., das ist, da 5 Fl. = 2 Sp. Rthl., so setzt man 5 Fl. : 2 Sp. Rthl. = 2375 Fl. zu .... Antwort 950 Sp. Rthl.

Ferner gehen wir auf Berliner Rthl. nach dem Cours zu 142: Also 100 Sp. Rthl. : 142 Rthl. = 950 : Antwort 1349 Rthl.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten, und setzen also: 3 Rthl. : 1 Ducaten = 1349 Rthl. zu ... Antwort $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

482.

Um solche Rechnungen noch mehr zu erläutern, so wollen wir setzen, der Banquier zu Berlin mache

Schwie-

Schwierigkeit, diese Summe zu bezahlen, unter einem oder andern Vorwand, was es auch für einer seyn mag, und wolle diesen Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug bezahlen. Dieses ist aber also zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regel detri hinzu gefügt werden, $105 : 100 = 449\frac{2}{3}$ zu.... Giebt also $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483.

Hierzu wurden nun sechs Rechnungen nach der Regel detri erfordert: man hat aber Mittel gefunden, diese Rechnungen ungemein abzukürzen, durch Hülfe der sogenannten Kettenregel. Um dieselbe zu erklären, so laßt uns von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vordersätze in Betrachtung ziehen, und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb. II.) 20 Stüb. : 1 Fl. Holl.
III.) 5 Fl. Holl. : 2 Sp. Rthl. IV.) 100 Sp. Rthl. : 142 Rth.
V.) 3 Rthl. : 1 Sp. Ducaten VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wenn wir nun die obigen Rechnungen betrachten, so finden wir, daß wir die vorgegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt, und durch die ersten dividirt haben; daraus ist klar, daß man eben dieses finden werde, wenn man die vorgegebene Summe auf einmal mit dem Product aller zweyten multiplicirt, und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder, wenn man diese einzige Regel detri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Product aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten, die in Berlin bezahlt wird.

484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten

Satz

Satz aufheben läßt, da man denn dieselben Sätze ausstreicht, und an ihrer Stelle die Quotus setzt, welche man durch die Aufhebung erhält: Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen:

Rbl.	2.	19	98 St. Holl. Cur. 1000 Rbl.
	20.		1 Hol. Fl.
	8.		2 Sp. Rthl.
	100.		142 Rthl.
	3.		1 Duc.
	108. 21.	8, 100	Duc.

6300 : 2698 = 1000 zu ...

7) 26980

9) 3854 (2

428 (2 Antwort $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

485.

Um die Kettenregel zu gebrauchen, so muß man diese Ordnung beobachten; man fängt mit eben der Münzsorte an, von welcher die Frage ist, und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen, und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so, daß ein jedes Verhältniß mit eben der Münzsorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort, bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch etliche Fragen beysetzen.

Wenn die Ducaten in Hamburg 1 p. C. besser sind als 2 Rthl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B°. machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Pohln. ist, (das ist, 1 Rthl. B°. macht 119 Gr. Pohln.) wie viel betragen 1000 Duc. in Fl. Pohl. (30 gr. Pohl. machen 1 Fl. Pohl.)

Duc

Duc. 1	:	2 Rthl. B°	1000 Duc.
100, 50	:	101 Rthl. B°	
1	:	119 Gr. Pohl.	
30	:	1 Fl. Pohl.	
1500		12019 = 1000 Duc. zu ...	

3) 120190

5) 40063 (1

8012 (3 Antwort $8012\frac{3}{5}$ Fl. Pohl.

487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Fragzahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da denn das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt, die verlangte Antwort giebt.

Frage: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten, (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Hol.) Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°.) und der Wechselcours von Leipzig nach Amsterdam in B°. $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist, für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.) Endlich 2 Rthl. Hol. 5 Fl. Hol. thun, wie viel sind nach diesen Coursen vor solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thl. zu bezahlen.

8, 1000 Duc.

Duc. 8	:	26 Fl. Hol. Cour.
105, 21	:	4, 20, 100 Fl. Hol. B°.
8	:	2 Rthl. Hol. B°.
400, 2	:	533 Thl. in Leipzig.
21	:	3) 55432 (1

7) 18477 (4

2639

Antwort $2639\frac{13}{21}$ Thl.

oder 2639 Thl. 15 gut. Grsch.

Capitel

Capitel 10.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

488.

Zwey oder mehr Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man so wohl die Vordersätze als die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdenn sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnissen.

Also aus diesen Verhältnissen a : b, c : d, e : f entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß ace : bdf.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wenn man seine beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus Zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

~~12~~, ~~4~~, 2 : 5 ~~25~~
~~28~~ : ~~3~~, ~~33~~
~~55~~, ~~5~~ : ~~2~~, ~~56~~

---

2 : 5

Also erhält man durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß 2 : 5.

490.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merkwürdig, wo immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatz gleich ist. Also, wenn die gegebenen Verhältnisse sind

$$\begin{array}{c} a : b \\ b : c \\ c : d \\ d : e \\ e : a \\ \hline \end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß, wie 1 : 1

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemerke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyn z. E. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß, und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360, und der Breite wie 60 : 100. Also stehet es

$$\begin{array}{c} \not{5}\not{0}\not{0},\ 5 : 6,\ \not{3}\not{6}\not{0} \\ \not{6}\not{0} \quad : \quad \not{1}\not{0}\not{0} \\ \hline 5 : 6 \end{array}$$

Also verhält sich das Feld A zu dem Feld B wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit: das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen:

Verhält-

Verhältniß der Längen	720, 8	:	15, 60, 660
Verhältniß der Breiten	88, 8, 2	:	90
	16	:	15

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wissen, daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist. Nämlich, aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß, und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß, und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältnisse.

der Länge	36, 6, 3	:	42, 6
der Breite	16, 2,	:	24, 3
der Höhe	14, 2,	:	10, 5
	4	:	5

Also ist der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

494.

Wenn die Verhältnisse, welche man solcher Gestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältnisse. Nämlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnissen $a:b$ und $a:b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $aa:bb$; daher sagt man, die Quadraten stehen in einer gedoppelten Verhältniß ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältniß $a:b$ dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3:b^3$, daher sagt man, daß die Cubi ein dreyfältiges Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Cirkelrunde Plätze in den gedoppelten Verhältnissen ihrer Durchmesser verhalten, das will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Es sey ein solcher Platz A, dessen Durchmesser = 45 Fuß, eines andern Cirkelrunden Platzes B aber Durchmesser sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem verhalten wie 45. 45 zu 30. 30, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt

$$\begin{array}{c} \not{45},\ \not{9},\ 3 : \not{30},\ \not{6},\ 2 \\ \not{45},\ \not{9},\ 3 : \not{30},\ \not{6},\ 2 \\ \hline 9 : 4 \end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß ist, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B verhalten, wie $1^3 : 2^3$, oder wie $1 : 8$.

Wenn also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmal schwerer seyn als die Kugel A.

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonenkugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur von einer das Gewicht hat. Es sey z. E. eine Kugel A, deren Durchmesser = 2 Zoll, und die fünf ℔. schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 :$ Giebt 320 ℔., und dieses ist das

Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser = 15 Zoll wird das Gewicht gefunden

$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots$ Antwort $2109\frac{3}{8}$ ℔.

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden: denn man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß ad : bc heraus, welches jenem gleich ist, daher diese Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 . 36 : 24 . 25 = 9 : 10$.

499.

Es wird ferner gefragt, wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist denn so gleich klar, daß seyn werde $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, welches also mit Worten ausgesprochen wird: Daß sich zwey Brüche, deren Zähler 1 sind, unter sich verhalten, umgekehrt, wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so sind sie gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler, nämlich wie a : b. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder 2 : 3.

500.

500.

Bey dem freyen Fall der Cörper hat man bemerket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwärts die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun, wie viel Zeit ein Stein brauche, um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen: so ist 15 : 2160 = 1 : Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das ist, wie $1^2 : 3600^2$, also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß, zu der gesuchten Höhe

1 : 12960000 = 15 zu ...

```
         15
   ----------
   64800000
   1296
   ----------
  194400000
```

Antwort 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die ganze Erde dicke ist.

502.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit dem Preiß der Edelgesteine, welche sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richten.

Bey den Diamanten gilt diese Regel, daß sich der Preiß wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preiße ist gleich dem gedoppelten Verhältnisse des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so vielmal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regel detri so gesetzt werden,

$1^2 : 100^2 = 2$ Rubel :

oder $1 : 10000, = 2$ Rbl. zu . . . Antwort 20000 Rbl.

In Portugall befindet sich ein Diamant von 1680 Karath, dessen Preiß demnach also gefunden wird.

$1^2 : 1680^2 = 2$ Rubel, : – oder

$1 : 2822400 = 2$: . . . . Antwort 5644800 Rubel.

503.

Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein merkwürdiges Exempel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gl. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wissen will, wie viel vor 28 Pferde auf 4$\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1 : 28, darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2 : 9, und setzt die zwey Verhältnisse zusammen

2 : 252, oder kürzer 1 : 126 = $\frac{1}{3}$ zu . . . Antwort 42 Rthl.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also zu stehen.

8, 2 : 30, 15, 5

3 : 4

1 : 5 = 1 Ducaten : –

Daher ist die Bezahlung 5 Ducaten.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältnisse auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wenn also z. E. einem Mäurer täglich 10 Gr. gegeben wird, und man will wissen, wie viel an 24 Mäurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also:

1 : 24
1 : 50
1 : 1200 = 10 Gl. : 500 Rthl.
10
12000 Gl.
3) 4000
8) 500 Rthl.

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regula Quinque genennt.

Capitel II.

Von den geometrischen Progressionen.

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse stehet, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende,

 wird

wird der Nenner genennt, wenn also das erste Glied 1 ist, und der Nenner = 2, so ist die geometrische Progression folgende:

Glieder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prog. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 ꝛc.

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben, um anzuzeigen, das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wenn man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so kommt die geometrische Progression also zu stehen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \;.\;.\;.\; n$$
$$\text{Prog. } a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7 \;.\;.\;.\; ab^{n-1}.$$

Wenn also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu merken, wenn der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner $b = 1$, so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wenn $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese geometrische Progression:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}, \tfrac{1}{64}, \tfrac{1}{128} \text{ ꝛc.}$$

507.

Hierbey kommen nach folgende Stücke zu betrachten vor:

I.) das erste Glied, welches hier a genennt wird
II.) der Nenner, welcher hier b genennt wird
III.) die Anzahl der Glieder, welche = n gesetzt worden
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Daher, wenn die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden, wenn man die n − 1ste Potestät des Nenners b, das ist b^{n-1}, mit dem ersten Glied a multiplicirt.

Wollte

Wollte man nun von dieser geometrischen Progression 1, 2, 4, 8 rc. das 50ste Glied wissen, so ist hier $a = 1$, $b = 2$ und $n = 50$. Daher das 50ste Glied seyn wird $= 2^{49}$. Da nun $2^9 = 512$, so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen, giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen, giebt $2^{40} = 1099511627776$. Wenn man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512 \cdot 1099511627776 = 562949953421312$.

508.

Hiebey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgender Gestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, wovon wir die Summe durch den Buchstaben s andeuten wollen, also, daß

$$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$s = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen, und $= n$ setzen, also, daß die Summe seyn wird $s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots 2^{n-1}$. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^n$, von diesen subtrahirt man jenes, so bekommt man $s = 2^n - 1$. Daher wird die gesuchte Summe gefunden, wenn man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt, um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor n nach und nach 1, 2, 3, 4, schreiben werden, erläutern, als: 1=1, 1+2=3, 1+2+4=7, 1+2+4+8=15, 1+2+4+8+16=31, 1+2+4+8+16+32=63 ꝛc.

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig, und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, ꝛc. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt, und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $=2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20}=1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10}=1024$, um zu haben $2^{30}=1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31}=2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1: das ist 4294967295 Pfennige.

2) 4294967295 Pf.

6) 2147483647 (1.

oder 357913941 Gl. 3 Pf.

3) 357913941

8) 119304647

oder 14913080 Rthl. 21 Gl. 3 Pf.

Also wird der Preiß des Pferdes seyn 14913080 Rthl. 21 Gl. 3 Pf.

512.

512.

Es sey nun der Nenner = 3, und die geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange = s, also, daß:

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3, um zu haben

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s = 2187 - 1 = 2186$. Daher ist die gedoppelte Summe = 2186, und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder = n, und die Summe = s, also, daß $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt, giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hiervon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer den letzten, gegen alle Glieder der obern, außer den ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$, und also $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wenn man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt, und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen; $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $=a$, der Nenner $=b$, die Anzahl der Glieder $=n$, und die Summe derselben $=s$, also, daß

$$s=a+ab+ab^2+ab^3+ab^4+\ldots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit b, so bekommt man $bs=ab+ab^2+ab^3+ab^4+\ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige, so erhält man $(b-1).s=ab^n-a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $s=\frac{ab^n-a}{b-1}$.

Daher wird die Summe einer jeglichen geometrischen Progression gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt, und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $=3$, und der Nenner $=2$, so ist $a=3$, $b=2$, und $n=7$, folglich das letzte Glied 3.2^6, das ist $3.64=192$, und die Progression selbst

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192.$$

und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b-1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

516.

Es sey ferner gegeben eine geometrische Progression von sechs Gliedern, davon das erste 4, und der Nenner $\frac{3}{2}$. Also, daß die Progression ist:

$$4,\ 6,\ 9,\ \tfrac{27}{2},\ \tfrac{81}{4},\ \tfrac{243}{8}$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt, giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt, giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b-1=\frac{1}{2}$, giebt $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

517.

Wenn der Nenner kleiner ist als 1, und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression, die ohne Ende fortläuft, angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied = 1, der Nenner = $\frac{1}{2}$, und die Summe = s, also, daß

$$s = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$$2s = 2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $s = 2$, welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied = 1, der Nenner $\frac{1}{3}$, und die Summe = s, also, daß

$$s = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire alles mit 3, so hat man

$$3s = 3 + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hiervon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt $2s = 3$, folglich ist die Summe = $1\frac{1}{2}$.

519.

Es sey ferner das erste Glied = 2, der Nenner = $\frac{3}{4}$, die Summe = s, also, daß $s = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$, so hat man $\frac{4}{3}s = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3}s = \frac{8}{3}$, also die Summe selbst wird seyn just 8.

520.

Wenn überhaupt das erste Glied gesetzt wird = a, und der Nenner der Progression = $\dfrac{b}{c}$, so, daß dieser Bruch kleiner ist als 1, und folglich b kleiner ist als c, so

so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgender Gestalt gefunden werden. Man setzt

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt $(1 - \frac{b}{c})s = a$,

$$\text{folglich ist } s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $s = \frac{ac}{c-b}$, daher ist die Summe dieser unendlichen geometrischen Progression $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ oder $= \frac{ac}{c-b}$.

Diese Summe wird folglich gefunden, wenn man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied, so bekommt man die Summe.

521.

Wenn in solchen Progressionen die Zeichen + und − mit einander abwechseln, so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Denn es sey

$$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ rc.}$$

dieses

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man:

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ rc.}$$

dieses addire man zu dem obigen, da erhält man $(1 + \frac{b}{c})$ $s = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe

$$s = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}} \text{ oder } s = \frac{ac}{c + b}.$$

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$, und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$, das ist, $b = 2$ und $c = 5$, so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ rc. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe $= 1$.

Wenn aber die Zeichen + und − abwechseln, und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ rc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ rc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$, und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.

Nimmt

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{30}$.

Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{300}$ zu $\frac{1}{3}$ ꝛc.

524.

Wenn diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000} \text{ꝛc.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger den Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe = 10. Hier ist zu merken, daß diese Reihe durch einen Decimalbruch also vorgestellet wird: 9, 9999999 ꝛc.

Capitel 12.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

525.

Wir haben oben gesehen, daß bey den logarithmischen Rechnungen, anstatt der gemeinen Brüche, Decimalbrüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an, zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimalbruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimalbruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, welcher entspringt, wenn man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man, anstatt a, diese Form

a,

1, 0000000, welche offenbar nichts anders anzeigt, als die Zahl 1, weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma, welches die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Exempel erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimaldivision, wie folget, zu stehen:

$$\frac{2)\ 1,\ 0000000}{0,\ 5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir, daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder, als 0,5, welches auch offenbar ist, indem dieser Decimalbruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist, als $\frac{1}{2}$.

527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$, so hat man diesen Decimalbruch

$$\frac{3)\ 1,\ 0000000}{0,\ 3333333}\ \text{rc.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man, daß dieser Decimalbruch, dessen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ rc. ohne Ende, zusammen genommen, just so viel, als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimalbruch, der auch ins Unendliche fortläuft,

$$\frac{3)\ 2,\ 0000000}{0,\ 6666666}\ \text{rc.} = \frac{2}{3},$$

welches auch aus dem vorigen klar ist, weil dieser Bruch zweymal so groß ist, als der vorige.

528.

528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimaldivision

$$\frac{4)\ 1,0000000}{0,2500000} = \frac{1}{4}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0,2500000, oder als 0,25, welches daher klar ist, daß $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimalbruch

$$\frac{4)\ 3,0000000}{0,7500000} = \frac{3}{4},$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,75$, das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, welcher Bruch durch 25 abgekürzt, giebt $\frac{3}{4}$.

Wöllte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)\ 5,0000000}{1,2500000} = \frac{5}{4};$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$, das ist, $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0,2$: und $\frac{2}{5} = 0,4$; ferner $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{5}{5} = 1$, weiter, $\frac{6}{5} = 1,2$ ꝛc.

Wenn der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,1666666$ ꝛc. welches so viel ist, als $0,666666 - 0,5$. Nun aber ist $0,666666 = \frac{2}{3}$ und $0,5 = \frac{1}{2}$, folglich ist $0,1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0,3333333$ ꝛc. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0,5000000 = \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0,833333 = 0,3333333 + 0,5$, das ist, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Wenn der Nenner 7 ist, so werden die Decimalbrüche mehr verwirrt: Also für $\frac{1}{7}$ findet man 0,142857 ꝛc. wobey zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimalbruch just $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandele man denselben

selben in eine geometrische Progression, wovon das erste Glied $= \frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$; also wird die Summe $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird diese Summe $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

531.

Daß der gefundene Decimalbruch just $\frac{1}{7}$ betrage, kann noch leichter folgender Gestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben s, also, daß

$$
\begin{array}{lrl}
 & s = & 0,142857142857142857 \text{ ꝛc.} \\
\text{so wird} & 10\,s = & 1,42857142857142857 \text{ ꝛc.} \\
 & 100\,s = & 14,2857142857142857 \text{ ꝛc.} \\
 & 1000\,s = & 142,857142857142857 \text{ ꝛc.} \\
 & 10000\,s = & 1428,57142857142857 \text{ ꝛc.} \\
 & 100000\,s = & 14285,7142857142857 \text{ ꝛc.} \\
 & 1000000\,s = & 142857,142857142857 \text{ ꝛc.} \\
\text{Subtrahire} & s = & 0,142857142857 \text{ ꝛc.} \\
\hline
 & 999999\,s = & 142857.
\end{array}
$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $s = \frac{142857}{999999}$, und dieses ist der Werth des obigen Decimalbruchs $\frac{1}{7}$.

532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimalbruch 0,28571428 ꝛc. Dieses leitet uns darauf, wie man den Werth des vorigen Decimalbruchs, den wir s gesetzt haben, leichter finden kann, weil dieser Bruch just zweymal so groß ist als der vorige, und also $= 2\,s$; da wir nun gehabt haben:

$$
\begin{array}{lrl}
 & 100\,s = & 14,2857142857\text{1 ꝛc.} \\
\text{hiervon } 2\,s \text{ weggenommen} & 2\,s = & 0,28571428571 \text{ ꝛc.} \\
\hline
\text{bleiben} & 98\,s = & 14; \\
\text{daher wird} & s = & \frac{14}{98} = \frac{1}{7}.
\end{array}
$$

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,42857142857$ ꝛc. dieses ist also nach dem obigen Satz $= 3s$; wir haben aber gefunden:

$$10s = 1,42857142857 \text{ ꝛc.}$$
$$\text{Subtrahire } 3s = 0,42857142857 \text{ ꝛc.}$$
$$\text{so wird } 7s = 1, \text{ folglich } s = \tfrac{1}{7}.$$

533.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so lauft der Decimalbruch ins Unendliche, und werden darinnen 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen heraus kommen als vom Anfang. Wenn aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fällt dieses weg.

534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimalbrüche gefunden:

$\frac{1}{8} = 0,125$: $\frac{2}{8} = 0,250$: $\frac{3}{8} = 0,375$: $\frac{4}{8} = 0,500$:
$\frac{5}{8} = 0,625$: $\frac{6}{8} = 0,750$: $\frac{7}{8} = 0,875$ ꝛc.

535.

Ist der Nenner 9, so findet man folgende Decimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,111$ ꝛc. $\frac{2}{9} = 0,222$ ꝛc. $\frac{3}{9} = 0,333$ ꝛc. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$; welches für sich offenbar.

536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimalbruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ ꝛc. Wäre nun dieser Bruch gegeben, und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben $= s$. Es wird also $s = 0,0909090$: und $10 s = 00,909090$. Weiter $100 s = 9,09090$. Hiervon s subtrahirt, so wird $99 s = 9$, und daher $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

537.

Hier sind nun diejenigen Decimalbrüche sehr merkwürdig, da einige Zahlen immer wiederholt werden, und solcher Gestalt ins Unendliche fortgehen. Wie nun von solchen Brüchen der Werth leicht zu finden sey, soll so gleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche sey $= a$, so haben wir $s = 0,aaaaaaa$. Diesemnach wird

$$10 s = a,aaaaaaa.$$

Subtrahire $s = 0,aaaaaaa$

so wird $9 s = a$, folglich $s = \frac{a}{9}$.

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man $s = 0,abababa$. Daher wird $100 s = ab,ababab$; hiervon s subtrahirt, bleibt $99 s = ab$; also $s = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen, als abc immer wiederholt, so hat man $s = 0,abcabcabc$; folglich $1000 s = abc,abcabc$. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $999 s = abc$; also $s = \frac{abc}{999}$, und so weiter.

538.

So oft also ein solcher Decimalbruch vorkommt, so ist es leicht, seinen Werth anzuzeigen: also, wenn dieser gegeben wäre 0,296296; so wird sein Werth seyn $= \frac{296}{999}$. Dieser Bruch durch 37 abgekürzt, wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun hinwiederum der obige Decimalbruch entspringen; um dieses leichter zu zeigen, weil 27=3.9, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotus ferner durch 3, wie folget:

9) 8,0000000
3) 0,8888888
0,2962962 ꝛc.

Welches der gegebene Decimalbruch ist.

539.

Um noch ein Exempel zu geben, so verwandele man diesen Bruch $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}$ in einen Decimalbruch, welches folgender Gestalt geschieht.

2) 1,0000000000000
3) 0,5000000000000
4) 0,1666666666666
5) 0,0416666666666
6) 0,0083333333333
7) 0,0013888888888
8) 0,0001984126984
9) 0,0000248015873
10) 0,0000027557319
0,0000002755731

Capitel 13.

Von den Interessenrechnungen.

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also, daß von 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht, den Zins von einem jeglichen Capital zu berechnen, indem man nach der Regel detri sagt:

100 geben 5, was giebt das gegebene Capital. Es sey z. E. das Capital 860 Rthl., so findet man den jährlichen Zins

100 : 5 = 860 zu Antwort 43 Rthl.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)\ 4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

541.

Bey Berechnung dieses einfachen Interesse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen, und dadurch das Capital vermehret wird, wobey denn gefragt wird: Wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfliessung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthl. nach einem Jahr zu 105 anwach-

anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfliessung eines Jahres werden müsse?

Es sey das Capital = a, so wird solches nach einem Jahre gefunden, wenn man sagt, 100 geben 105, was giebt a; Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20}.a$, oder $a + \frac{1}{20}.a$.

542.

Wenn also zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wenn man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital anjetzo 1000 Rthl., welches zu 5 P.C. angelegt ist, und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden, weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimalbrüchen ausdrücken, nicht weiter aber, als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegen-

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthl. wird

nach 1 Jahr	= =	1050 Rthl.
	= =	52, 5
nach 2 Jahren	= =	1102, 5
		55, 125
nach 3 Jahren	= =	1157, 625
		57, 881
nach 4 Jahren	= =	1215, 506
		60, 775
nach 5 Jahren	= =	1376, 281 ꝛc.
		1276

544.

Solcher Gestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen, als man will; wenn aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam: dieselbe läßt sich aber folgendergestalt abkürzen.

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$, und da ein Capital von 20 Rthl. nach einem Jahr 21 Rthl. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahr auf $\frac{21}{20}.a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahr auf $\frac{21^2}{20^2}.a = (\frac{21}{20})^2.a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahr wieder anwächst auf $(\frac{21}{20})^3.a$, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^4.a$; nach fünf Jahren $(\frac{21}{20})^5.a$; nach 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100}.a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^n.a$; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Interesse zu 5 Proc. gerechnet wird, und

$\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Interesse zu 6 Proc. gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahr anwachsen auf $\frac{106}{100}.a$; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2.a$; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n.a$.

Sollte aber das Interesse nur 4 Proc. betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $(\frac{104}{100})^n.a$.

546.

Wenn nun, so wohl das Capital a, als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formel leicht auflösen, nämlich durch die Logarithmen. Denn man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 Proc. ist $(\frac{21}{20})^n.a$. Da nun dieselbe ein Product ist von $(\frac{21}{20})^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^n + la$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potestät ist, so ist $l(\frac{21}{20})^n = n\,l\frac{21}{20}$. Daher ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n.\,l\frac{21}{20} + la$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = l21 - l20$.

547.

Es sey nun das Capital = 1000 Rthl., und man fragt, wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5 Proc. seyn werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun seyn $= 100\,l\frac{21}{20} + l\,1000$, welcher folgender Gestalt berechnet wird:

$$\begin{array}{rl}
l\,21 = & 1,\ 3222193 \\
\text{subtr. } l\,20 = & 1,\ 3010300 \\
\hline
l\frac{21}{20} = & 0,\ 0211893 \\
\text{multipl. mit } 100 & \\
\hline
100\,l\frac{21}{20} = & 2,\ 1189300 \\
\text{addirt } l1000 = & 3,\ 0000000 \\
\hline
& 5,\ 1189300
\end{array}$$

dieses

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals, und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen, und also heißen 131501 Rthlr.

548.

Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6 Proc. wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64 \, l \, \frac{53}{50} + l \, 3452$, welches also berechnet wird:

$$
\begin{array}{rl}
 & l \, 53 = 1,\ 7242759 \\
\text{subtr.} & l \, 50 = 1,\ 6989700 \\
\hline
 & l \, \frac{53}{50} = 0,\ 0253059 \\
\hline
\text{mult. mit } 64; & 64 \, l \, \frac{53}{50} = 1,\ 6195776 \\
 & l \, 3452 = 3,\ 5380708 \\
\hline
 & 5,\ 1576484
\end{array}
$$

Also das gesuchte Capital = 143763 Rthl.

549.

Wenn die Anzahl der Jahre sehr groß ist, und weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmus in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, so könnte daraus ein merklicher Fehler entstehen. Daher muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen: Ein Capital von einem Rthl. zu 5 pr. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen worden: Nun fragt sichs, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500 \, l \, \frac{21}{20} + l \, 1$, woraus diese Rechnung entspringt:

$$\begin{array}{rl} & l\,21 = 1,3222192947339 19 \\ \text{subtrahirt} & l\,20 = 1,3010299956639 81 \\ \hline & l\,\tfrac{21}{20} = 0,0211892990699 38 \end{array}$$

mult. mit 500, giebt 10,5946495349690 00

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches daher selbst seyn wird = 39323200000 Rthlr.

550.

Wenn man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interesse schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summe = b darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen, wie folget. Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20} b + b$

nach 3 Jahr $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20} b + b$

nach 4 Jahr $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20} b + b$

nach n Jahr $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$
$\ldots + \frac{21}{20} b + b.$

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste $= (\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwärts geschrieben $b + (\frac{21}{20}) b + (\frac{21}{20})^2 a + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$ besteht, welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$; Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger, als der Nenner ist, dividirt werden, das ist, durch $\frac{1}{20}$; daher wird die Summe der obigen Progression $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$$(\tfrac{21}{20})^n a + 20 . (\tfrac{21}{20})^n b - 20 b = (\tfrac{21}{20})^n . (a + 20 b) - 20 b.$$

551.

551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n (a+20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wenn man den Logarithmus desselben sucht, welcher ist $n\, l\, \frac{21}{20} + l\,(a+20b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man 20b, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen, wozu er jährlich, außer den Zinsen, noch 100 Rthl. hinzu legt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a=1000$; $b=100$; $n=25$; daher wird die Rechnung stehen, wie folget:

$$l\,\tfrac{21}{20} = 0,021189299$$
multiplic. mit 25 giebt
$$25\, l\,\tfrac{21}{20} = 0,5297324750$$
$$l\,(a+20b) = 3,4771213135$$
$$4,0068537885$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthl. davon subtrahirt $20b = 2000$, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159, 1 Rthl.

553.

Da nun das Capital immer größer wird, und nach 25 Jahren auf 8159 $\frac{1}{10}$ Rthl. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthl. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$, so wird nach n Jahren das Capital seyn:

$(\frac{21}{20})^n$

$(\frac{21}{20})^n(3000) - 2000$, dieses muß nun 1000000 Rthl. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000, so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmus, so hat man $n.\,l\,\frac{21}{20} = l\,334$. Hier dividirt man durch $l\,\frac{21}{20}$, so kommt $n = \dfrac{l\,334}{l\,\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $l\,334 = 2,5237465$ und $l\,\frac{21}{20} = 0,0211893$; daher wird $n = \dfrac{2,5237465}{0,0211893}$.

Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist, 119 Jahr 1 Monat 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthl.

554.

Wenn aber anstatt, daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgender Gestalt fortgehen:

Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20})\,b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon wird subtrahirt diese geometrische Progression rückwärts geschrieben $b + \frac{21}{20}b + (\frac{21}{20})^2 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1}$. Hiervon ist oben die Summe

gefun-

gefunden worden $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$, welche von dem ersten $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $\left(\frac{21}{20}\right)^n (a - 20b) + 20b$.

556.

Diese Formel hätte so gleich aus der vorigen geschlossen werden können. Denn da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel, anstatt $+ b$, nur $- b$ schreiben. Hier ist nun insonderheit zu merken, daß, wenn $20b$ größer ist, als a, so wird das erste Glied negativ, und also das Capital immer kleiner; welches vor sich offenbar ist, denn wenn vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden, und endlich gar verschwinden, welches wir mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen; braucht alle Jahr zu seinem Unterhalt 6000 Rthl., welches mehr ist als das Interesse von 100000 Rthl., so nur 5000 Rthl. beträgt, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden werde?

Vor diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a = 100000$ Rthl. und $b = 6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= -20000\left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$, oder $120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital, wenn $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst, oder wenn $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Man nehme die Logarithmus, so kommt $n\, l\, \frac{21}{20} = l\, 6$. Man dividire durch $l\, \frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{l\, 6}{l\, \frac{21}{20}} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$; folglich

wird

wird n=36 Jahr 8 Monat 22 Tage: und nach so vieler Zeit wird es verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig, zu zeigen, wie nach diesem Grund die Interessen auch vor eine kleinere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 pr. C. nach n Jahren auf $(\frac{21}{20})^n a$ anwächst, ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch, und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmus gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n=\frac{1}{365}$; will man es nach zwey Tagen wissen, so wird $n=\frac{2}{365}$ rc.

559.

Es sey das Capital a=100000 Rthl. zu 5 p. C., wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist a=100000 und $n=\frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}\,100000$. Hiervon ist der Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + l\,100000 = \frac{8}{365}\,l\,\frac{21}{20} + l\,100000$.
Nun aber ist $l\,\frac{21}{20} = 0,0211892$.

dieser mit $\frac{8}{365}$ multipl. giebt 0,0004644
hierzu ad. l 100000, welcher ist 5,0000000
5,0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital = 5,0004644. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthl. so, daß in den ersten 8 Tagen das Interesse schon 107 Rthl. austrägt.

560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wenn eine Summe Geld erst nach einigen Jahren

ren verfällt, wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu betrachten, daß da 20 Rthl. über ein Jahr 21 Rthl. austragen, so sind hinwiederum 21 Rthl., die nach einem Jahr zahlbar sind, anjetzo nur 20 Rthl. werth. Wenn also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist desselben Werth $\frac{20}{21}a$. Um also zu finden, wie viel das Capital a, so zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth ist, so muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $(\frac{20}{21})^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3 a$, und überhaupt n Jahr früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n a$.

561.

Einer genießt auf 5 Jahr lang eine jährliche Rente von 100 Rthl., dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 pr. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

für die 100 Rthl., welche verfallen,

nach 1 Jahr	bekommt	er	95, 239
nach 2 Jahren	„	„	90, 704
nach 3 Jahren	„	„	86, 385
nach 4 Jahren	„	„	82, 272
nach 5 Jahren	„	„	78, 355
Summa aller 5 Jahren	„	„	432, 955

Also kann er vor diese Rente nicht mehr fordern, als 432, 955 Rthl. oder 432 Rthl. 22 Gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgender Gestalt erleichtert werden kann:

Es

Es sey die jährliche Rente $= a$, welche jetzo schon anfängt, und n Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

$$a+\frac{20}{21}a+\left(\frac{20}{21}\right)^2a+\left(\frac{20}{21}\right)^3a+\left(\frac{20}{21}\right)^4a+\ldots\left(\frac{20}{21}\right)^na.$$

Dieses ist nun eine geometrische Progression, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a$; Davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a-a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden: daher wird die gesuchte Summe seyn $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a + 21a$, das ist, $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1}a$, wovon das letztere Glied, so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmus berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils

und des dritten Abschnitts von den Verhältnissen und Proportionen.



Leonhard Euler

vollständige

Anleitung

zur

Algebra.

Zweyter Theil

von den

verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen.

Mit Röm. Kayserl. und Churfürstl. Sächß. allergnädigsten Privilegiis.

St. Petersburg 1771.

bey der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften.

Des
Zweyten Theils
Erster Abschnitt
Von
den Algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.



Des

Zweyten Theils
Erster Abschnitt
Von den Algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Capitel I.

Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt.

1.

Die Hauptabsicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematik ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekannt gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Daher die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde, wie man aus bekannten Größen unbekannte ausfindig machen könne.

2.

Dieses stimmt auch mit allem demjenigen überein, was bisher vorgetragen worden, indem allenthalben aus bekannten Größen andere heraus gebracht worden sind, so vorher als unbekannt angesehen werden konnten.

Das erste Beyspiel findet man so gleich in der Addition, da von zwey oder mehr gegebenen Zahlen die Summe gefunden worden. Daselbst wurde nämlich eine Zahl gesucht welche den gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Bey der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterscheid zweyer gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln, wo immer eine vorher umbekannte Zahl aus bekannten gefunden wird.

3.

In dem letzten Abschnitt haben wir schon verschiedene Fragen aufgelöset, wobey es immer auf die Erfindung einer Zahl angekommen, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewissen Bedingungen geschlossen werden mußte.

Alle Fragen laufen also da hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewissen Verbindung stehe, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müssen, bestimmt.

4.

Bey einer jeden vorkommenden Frage wird nun diejenige Zahl die gesucht werden soll, durch einen der

letztern

letztern Buchstaben des Alphabets angedeutet, und dabey alle vorgeschriebene Bedingungen in Erwegung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwischen zweyen Zahlen geführet wird. Aus einer solchen Gleichung muß hernach der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Frage aufgelöset wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, welches auf gleiche Weise durch Gleichungen geschehen muß.

5.

Dieses wird durch ein Exempel deutlicher werden: man stelle sich diese Frage vor:

20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 8 Gl. ein Weib aber 7 Gl. und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen?

Um diese Frage aufzulösen, so setze man die Zahl der Männer $= x$, und sehe dieselbe als bekannt an, oder man verfahre damit als wann man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer $= x$ ist und Männer und Weiber zusammen 20 Person ausmachen so kann man daraus die Anzahl der Weiber bestimmen, welche gefunden wird wann man die Zahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gl. verzehrt, so werden diese x Männer verzehren $8x$ Gl.

Und weil ein Weib 7 Gl. verzehrt so werden diese $20 - x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gl.

Also verzehren Männer und Weiber zusammen $140 + x$ Gl. Wir wissen aber wie viel sie verzehrt haben, nämlich 6 Rthl. welche zu Gl. gemacht 144 Gl. sind, daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$ woraus man leicht sieht daß $x = 4$.

 Daher

Daher waren bey der Zeche 4 Männer und 16 Weiber.

6.

Eine andere Frage von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müssen, wie viel waren es Männer und Weiber?
Es sey die Zahl der Männer $= x$.
so ist die Zahl der Weiber $= 20 - x$.
Da nun diese x Männer 24 Fl. verzehrt haben, so hat ein Mann verzehrt $\frac{24}{x}$ Fl.

Und weil die $20 - x$ Weiber auch 24 Fl. verzehret haben, so hat ein Weib verzehrt $\frac{24 -}{20-x}$. Diese Zeche eines Weibes ist nun um 1 weniger, als die Zeche eines Mannes. Wann man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche eines Weibes heraus kommen; woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bey der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen daß $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7.

Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekannten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau

genau in Erwegung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die ganze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelöset, und daraus der Werth der unbekannten Zahlen gefunden werden soll, und hievon soll in diesem Abschnitt gehandelt werden.

8.

Bey den Fragen selbst ereignet sich auch ein Unterscheid, in dem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letztern Fall zu merken, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erfodert werden, welche aus den Umständen der Frage selbst hergeleitet werden müssen.

9.

Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekannten Zahl heraus zu bringen, müssen öfters sehr viele Verwandelungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, daß wann zwey Größen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wenn man zu beyden einerley Größen addirt oder davon subtrahirt: imgleichen auch wann dieselben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden: ferner auch wann beyde zugleich zu Potestäten erhoben oder aus beyden gleichnahmigte Wurzeln ausgezogen, und endlich auch wenn von beyden die Logarithmen genommen werden, wie schon allbereit im vorigen Abschnitt geschehen.

10.

Diejenigen Gleichungen, wo von der unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt, nach dem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen vom ersten

Grade genennet. Hernach folgen solche Gleichungen, worinnen die zweyte Potestät oder das Quadrat der unbekannten Zahl vorkommt, diese werden Quadratische Gleichungen, oder vom zweyten Grade genennt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grade oder die Cubischen worinnen der Cubus der unbekannten Zahl vorkommt, und so fort, von welchen allen in diesem Abschnitte gehandelt werden soll.

Capitel 2.

Von den Gleichungen des ersten Grads und ihrer Auflösung.

11.

Wann die unbekannte oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die heraus gebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz bloß allein das x und der andere Satz eine bekannte Zahl enthält, als z. E. $x = 25$, so hat man schon wirklich den Werth von x der verlangt wird, und auf diese Form muß man immer zu kommen trachten, so verwirrt auch die erst gefundene Gleichung seyn mag, worzu die Regeln im folgenden gegeben werden sollen.

12.

Wir wollen bey den leichtesten Fällen anfangen, und erstlich setzen, man sey auf diese Gleichung gekommen:

$x + 9 = 16$, so sieht man daß $x = 7$.

Es sey aber auf eine allgemeine Art $x + a = b$, wo a und b bekannte Zahlen andeuten, dieselben mögen heißen wie sie wollen. Hier muß man also beyderseits a sub-

a subtrahiren, und da bekommt man diese Gleichung $x = b - a$, welche uns den Werth von x anzeigt.

13.

Wenn die gefundene Gleichung ist $x - a = b$, so addire man beyderseits a, so kommt $x = a + b$, welches der gesuchte Werth von x ist.

Eben so verfährt man, wenn die erste Gleichung also beschaffen ist $x - a = aa + 1$, denn da wird $x = aa + a + 1$.

Und aus dieser Gleichung $x - 8a = 20 - 6a$ bekommt man $x = 20 - 6a + 8a$ oder $x = 20 + 2a$.

Und aus dieser $x + 6a = 20 + 3a$ findet man $x = 20 + 3a - 6a$ oder $x = 20 - 3a$.

14.

Ist nun die Gleichung also beschaffen $x - a + b = c$, so kann man beyderseits a addiren, so kommt $x + b = c + a$, jetzt subtrahire man beyderseits b, so hat man $x = c + a - b$; man kann aber zugleich beyderseits $+ a - b$ addiren, so bekommt man mit einmal $x = c + a - b$. Also in den folgenden Exempeln;

wann $x - 2a + 3b = 0$ so wird $x = 2a - 3b$,

wenn $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, so wird $x = 25 + 4a$.

wenn $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, so wird $x = 34 - 4a$.

15.

Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt $ax = b$, so dividire man beyderseits durch a so hat man $x = \frac{b}{a}$.

Ist aber die Gleichung $ax + b - c = d$, so muß man erstlich dasjenige was bey ax steht wegbringen, man addire beyderseits $- b + c$ so kommt $ax = d - b + c$: folglich, $x = \frac{d - b + c}{a}$

oder man subtrahire beyderseits $+b-c$ so kommt $ax=d-b+c$ und $x=\frac{d-b+c}{a}$.

Es sey $2x+5=17$, so kommt $2x=12$ und $x=6$
Es sey $3x-8=7$, so kommt $3x=15$ und $x=5$
Es sey $4x-5-3a=15+9a$, so wird $4x=20+12a$, folglich $x=5+3a$.

16.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{x}{a}=b$, so multiplicire man beyderseits mit a, so kommt $x=ab$,

Ist nun $\frac{x}{a}+b-c=d$, so wird erstlich $\frac{x}{a}=d-b+c$ und $x=(d-b+c)\,a=ad-ab+ac$.
Es sey $\frac{1}{2}x-3=4$, so wird $\frac{1}{2}x=7$ und $x=14$.
Es sey $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$, so wird $\frac{1}{3}x=4-a$ und $x=12-3a$.

Es sey $\frac{x}{a-1}-1=a$ so wird $\frac{x}{a-1}=a+1$ und $x=aa-1$.

17.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{ax}{b}=c$, so multiplicire man beyderseits mit b, so wird $ax=bc$, und ferner $x=\frac{bc}{a}$.

ist aber $\frac{ax}{b}-c=d$, so wird $\frac{ax}{b}=d+c$ und $ax=bd+bc$ und folglich $x=\frac{bd+bc}{a}$.

Es sey $\frac{2}{3}x-4=1$, so wird $\frac{2}{3}x=5$ und $2x=15$ folglich $x=\frac{15}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$

Es

Es sey $\frac{3}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ = 5, also $\frac{3}{4}$ x = 5 − $\frac{1}{2}$ welches = $\frac{9}{2}$ und 3x = 18 und x = 6.

18.

Es kann auch geschehen, daß zwey oder mehr Glieder den Buchstaben x enthalten, und entweder in einen Satz oder in beyden vorkommen. Sind sie auf einer Seite als x + $\frac{1}{2}$ x + 5 = 11, so wird x + $\frac{1}{2}$ x = 6 und 3x = 12 und x = 4.

Es sey x + $\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{3}$ x = 44, was ist x? man multiplicire mit 3 so wird 4x + $\frac{2}{3}$ x = 132, ferner mit 2 multiplicirt wird 11x = 264 und x = 24; diese drey Glieder können aber so gleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}$ x = 44, man theile beyderseits durch 11 so hat man $\frac{1}{6}$ x = 4 und x = 24.

Es sey $\frac{2}{3}$ x − $\frac{3}{4}$ x + $\frac{1}{2}$ x = 1 welches zusammen gezogen giebt $\frac{5}{12}$ x = 1 und x = 2 $\frac{2}{5}$.

Es sey ax − bx + cx = d, so ist dieses eben so viel als (a − b + c) x = d, hieraus kommt $x = \frac{d}{a - b + c}$.

19.

Steht aber x in beyden Sätzen, als z. E. 3x + 2 = x + 10 so müssen die x von der Seite wo man am wenigsten hat weggebracht werden, also subtrahire man hier beyderseits x so kommt 2x + 2 = 10 und 2x = 8 und x = 4.

Es sey ferner x + 4 = 20 − x, also 2x + 4 = 20 und 2x = 16 und x = 8.

Es sey x + 8 = 32 − 3x, also 4x + 8 = 32 und 4x = 24 und x = 6.

Es sey ferner 15 − x = 20 − 2x, also 15 + x = 20 und x = 5.

Es sey 1 + x = 5 − $\frac{1}{2}$ x, also 1 + $\frac{3}{2}$ x = 5 und $\frac{3}{2}$ x = 4 und 3x = 8 und x = 2$\frac{2}{3}$.

Es

Es sey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kommt $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$, multiplicire mit 12 so kommt $x = 2$.
Es sey $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$ so kommt $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$ so hat man $\frac{7}{6}x = 1\frac{1}{4}$.
multiplicire mit 6 so bekommt man $7x = 7\frac{1}{2}$.
durch 7 dividirt, giebt $x = 1\frac{1}{14}$ oder $x = \frac{15}{14}$.

20.

Kommt man auf eine solche Gleichung wo die unbekannte Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die ganze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Also wenn man findet $\frac{100}{x} - 8 = 12$.

addire 8, so kommt $\frac{100}{x} = 20$,

multiplicire mit x, so hat man $100 = 20x$.
dividire durch 20, so kommt $x = 5$.

Es sey ferner $\frac{5x + 3}{x - 1} = 7$,

multiplicire mit $x - 1$, so hat man $5x + 3 = 7x - 7$.
subtrahire $5x$, so kommt $3 = 2x - 7$,
addire 7, so bekommt man $2x = 10$, folglich $x = 5$.

21.

Bisweilen kommen auch Wurzelzeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem ersten Grad; als wenn eine solche Zahl x gesucht wird unter 100, so daß die Quadratwurzel aus $100 - x$ gleich werde 8, oder daß $\sqrt{(100 - x)} = 8$, so nehme man beyderseits die Quadraten $100 - x = 64$, so hat man wenn x addirt wird $100 = 64 + x$ subtrahire 64, so hat man $x = 36$: oder man könnte auch also verfahren, da $100 - x = 64$, so subtra-

subtrahire man 100, und man bekommt $-x = -36$; mit -1 multiplicirt, giebt $x = 36$.

22.

Bisweilen kommt auch die unbekannte Zahl x in den Exponenten, dergleichen Exempel schon oben vorgekommen, und da muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen.

Als wenn man findet $2^x = 512$, so nimmt man beyderseits ihre Logarithmen, da hat man $x\, l\, 2 = l\, 512$; man dividire durch $l\, 2$ so wird $x = \frac{l\, 512}{l\, 2}$: nach den Tabellen ist also:

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ also } x = 9.$$

Es sey $5.\, 3^{2x} - 100 = 305$; man addire 100, kommt also $5.\, 3^{2x} = 405$; man dividire durch 5, so wird $3^{2x} = 81$; man nehme die Logarithmen $2x\, l\, 3 = l\, 81$ und dividire durch $2\, l\, 3$ so wird $x = \frac{l\, 81}{2\, l\, 3}$ oder $x = \frac{l\, 81}{l\, 9}$, folglich $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425}$; also wird $x = 2$.

Capitel 3.

Von der Auflösung einiger hieher gehörigen Fragen.

23.

Erste Frage:

Zertheile 7 in zwey Theile, so daß der größere um 3 größer sey als der kleinere?

Es

Es sey der grössere Theil = x so wird der kleinere seyn $7-x$, dahero muß seyn $x=7-x+3$ oder $x=10-x$; man addire x so kommt $2x=10$ und dividire durch 2 so wird $x=5$.

Antwort: der grössere Theil ist 5 und der kleinere 2.

II. Frage: man zertheile a, in zwey Theile, so daß der grössere um b grösser sey als der kleinere?

Es sey der grössere Theil x, so ist der kleinere $a-x$: dahero wird $x=a-x+b$, man addire x so wird $2x=a+b$ und dividire durch 2, so erhält man $x=\frac{a+b}{2}$.

Eine andere Auflösung: Es sey der grössere Theil $=x$, weil nun derselbe um b grösser ist als der kleinere, so ist hinwiederum der kleinere um b kleiner als der grössere; dahero wird der kleinere Theil $x-b$: diese beyde Theile zusammen müssen a ausmachen, dahero bekommt man: $2x-b=a$; man addire b, so kommt $2x=a+b$, folglich $x=\frac{a+b}{2}$ welches der grössere Theil ist, und der kleinere wird seyn $\frac{a+b}{2}-b$ oder $\frac{a+b}{2}-\frac{2b}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne und 1600 Rthl. Nach seinem Testamente soll der älteste Sohn 200 Rthl. mehr haben als der zweyte, der zweyte aber 100 Rthl. mehr als der dritte; wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des dritten sey $=x$, so ist das Erbtheil des zweyten $=x+100$, und das Erbtheil des ersten $=x+300$; diese 3 zusammen müssen 1600 Rthl. machen. Dahero wird $3x+400=1600$: man subtrahi-

trahire 400, so wird $3x = 1200$ und durch 3 dividirt giebt $x = 400$.

Antwort: der dritte bekommt 400 Rthl. der zweyte 500 Rthl. der erste 700 Rthl.

25.

IV. Frage: Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 8600 Rthl. Nach seinem Testamente soll der erste zweymal so viel bekommen als der zweyte weniger 100 Rthl. Der zweyte soll bekommen dreymal so viel als der dritte weniger 200 Rthl. und der dritte soll haben viermal so viel als der vierte weniger 300 Rthl. Wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des vierten sey $= x$, so ist das Erbtheil des dritten $4x - 300$, des zweyten $12x - 1100$ und des ersten $24x - 2300$. Hievon muß die Summe ausmachen 8600 Rthl. woraus diese Gleichung entsteht:

$41x - 3700 = 8600$: man addire 3700, so kommt $41x = 12300$; und durch 41 dividirt giebt $x = 300$.

Antwort: der vierte Sohn bekommt 300 Rthl. der dritte 900 Rthl. der zweyte 2500 Rthl. und der erste 4600 Rthl.

26.

V. Frage: Ein Mann hinterläßt 11000 Rthl. und darzu eine Witwe zwey Söhne und drey Töchter. Nach seinem Testamente soll die Frau zweymal mehr bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweymal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt ein jedes?

Das Erbtheil einer Tochter sey $= x$ so ist das Erbtheil eines Sohnes $= 2x$ und das Erbtheil der Witwe $= 4x$; folglich ist die ganze Erbschaft $3x + 4x + 4x$, oder $11x = 11000$; durch 11 getheilt giebt $x = 1000$.

Antwort: eine Tochter bekommt 1000 Rthl.
also alle drey bekommen 3000 Rthl.

ein

ein Sohn bekommt 2000 Rthl.

also beyde 4000

und die Mutter bekommt - - - 4000

Summa 11000 Rthl.

27.

VI. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne, welche das hinterlassene Vermögen folgender Gestalt unter sich theilen. Der erste bekommt 1000 Rthl. weniger als die Hälfte von der ganzen Verlassenschaft; der zweyte 800 Rthl. weniger als der dritte Theil der Verlassenschaft, und der dritte 600 Rthl. weniger als der vierte Theil der Verlassenschaft. Nun ist die Frage: wie groß die Verlassenschaft gewesen, und wie viel ein jeder bekommen?

Es sey die ganze Verlassenschaft $= x$

so hat der erste Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 800$

der dritte $\frac{1}{4}x - 600$

Alle drey Söhne zusammen haben also bekommen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, welches der ganzen Verlassenschaft x gleich gesetzt werden muß, woraus diese Gleichung entsteht, $\frac{13}{12}x - 2400 = x$

Man subtrahire x, so hat man $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$,

man addire 2400, so ist $\frac{1}{12}x = 2400$,

und mit 12, multiplicirt giebt $x = 28800$.

Antwort: die ganze Verlassenschaft war 28800 Rthl. davon hat nun der

erste Sohn bekommen 13400 Rthl.

der zweyte 8800

der dritte 6600

alle drey also 28800 Rthl.

28.

VII. Frage: Ein Vater hinterläßt vier Söhne; welche die Erbschaft also unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthl. weniger als die Hälfte der Erbschaft:
der zweyte nimmt 1000 Rthl. weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft:
der dritte nimmt just den $\frac{1}{4}$ der ganzen Erbschaft:
der vierte nimmt 600 Rthl. und den $\frac{1}{5}$ der Erbschaft:
wie groß war die Erbschaft und wie viel hat ein jeder Sohn bekommen?

Man setze die ganze Erbschaft $= x$
so hat bekommen der erste $\frac{1}{2}x - 3000$
der zweyte $\frac{1}{3}x - 1000$
der dritte $\frac{1}{4}x$
der vierte $\frac{1}{5}x + 600$

und alle vier zusammen nahmen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, welches seyn muß $= x$: also hat man diese Gleichung.

$\frac{77}{60}x - 3400 = x$
subtrahire x, so wird $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$
addire 3400 so kommt $\frac{17}{60}x = 3400$
durch 17 dividirt giebt $\frac{1}{60}x = 200$ und
mit 60 multiplicirt $x = 12000$.

Antwort: die ganze Verlassenschaft war 12000 Rthl.
davon bekam der erste 3000 Rthl.
der zweyte 3000
der dritte 3000
der vierte 3000

29.

VIII. Frage: Suche eine Zahl wenn ich darzu ihre Hälfte addire, daß so viel über 60 kommen, als die Zahl selbst ist unter 65?

Die Zahl sey x, so muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ so viel seyn als $65 - x$
das ist $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$
man addire x so hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$
man addire 60 so kommt $\frac{5}{2}x = 125$
durch 5 dividirt wird $\frac{1}{2}x = 25$ und
mit 2 multiplicirt giebt $x = 50$
Antwort: die gesuchte Zahl ist 50.

30.

IX. Frage: Man zertheile 32 in zwey Theile, wenn ich den kleinern dividire durch 6, den größern aber durch 5, daß die Quotienten zusammen 6 ausmachen.

Es sey der kleinere Theil = x so ist der größere = $32 - x$; der kleinere durch 6 dividirt giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt giebt $\frac{32-x}{5}$: also muß seyn $\frac{x}{6}$

$$+ \frac{32-x}{5} = 6$$

mit 5 multiplicirt giebt $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$, oder $-\frac{1}{6}x$
$+ 32 = 30$,
man addire $\frac{1}{6}x$ so kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$
30 subtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$
mit 6 multiplicirt wird $x = 12$
Antwort: der kleinere Theil ist 12, und der größere 20.

31.

X. Frage: Suche eine Zahl, wenn ich sie mit 5 multiplicire so ist das Product so viel unter 40, als die Zahl selbst ist unter 12.

Es sey diese Zahl = x, welche unter 12 ist um $12 - x$, die Zahl fünfmal genommen ist $5x$ und ist unter 40 um $40 - 5x$, welches eben so viel seyn soll als $12 - x$

also

also $40 - 5x = 12 - x$
addire $5x$ so wird $40 = 12 + 4x$,
12 subtrahirt giebt $28 = 4x$
durch 4 dividirt wird $x = 7$
Antwort: die Zahl ist 7.

32.

XI. Frage: Zertheile 25 in zwey Theile, so daß der größere 49 mal größer ist, als der kleinere?

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 25 - x$; dieser durch jenen dividirt soll 49 geben,

also wird $\frac{25 - x}{x} = 49$
mit x multiplicirt giebt $25 - x = 49x$
und x addirt kommt $50x = 25$
durch 50 dividirt bleibt $x = \frac{1}{2}$.
Antwort: der kleinere Theil ist $\frac{1}{2}$ und der größere $24\frac{1}{2}$, welcher durch $\frac{1}{2}$ dividirt, das ist mit 2 multiplicirt giebt 49.

33.

XII. Frage: Zertheile 48 in neun Theile, so daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer sey, als der vorhergehende?

Es sey der erste und kleinste Theil $= x$ so ist der zweyte $x + \frac{1}{2}$ und der dritte $= x + 1$ [illegible] ꝛc. Weil nun diese Theile eine Arithmetische Progression ausmachen, davon das erste Glied $= x$ so ist das neunte und letzte Glied $x + 4$, wozu das erste x addirt $2x + 4$ giebt. Diese Summe mit der Anzahl der Glieder 9, multiplicirt giebt $18x + 36$; dieses durch 2 getheilt giebt die Summe aller neun Theile $9x + 18$, so da seyn muß 48. Also hat man $9x + 18 = 48$
18 subtrahirt giebt $9x = 30$
durch 9 dividirt giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Antwort: der erste Theil ist $3\frac{1}{3}$ und die neun Theile sind folgende

$$\overset{1}{3\tfrac{1}{3}} + \overset{2}{3\tfrac{5}{6}} + \overset{3}{4\tfrac{1}{3}} + \overset{4}{4\tfrac{5}{6}} + \overset{5}{5\tfrac{1}{3}} + \overset{6}{5\tfrac{5}{6}} + \overset{7}{6\tfrac{1}{3}} + \overset{8}{6\tfrac{5}{6}} + \overset{9}{7\tfrac{1}{3}},$$

davon die Summe = 48.

34.

XIII. Frage: Suche eine Arithmetische Progression davon das erste Glied = 5 und das letzte = 10 die Summe aber = 60 sey?

Da hier weder der Unterschied noch die Anzahl der Glieder bekannt ist, aus dem ersten und letzten aber die Summe aller gefunden werden könnte, wenn man nur die Anzahl der Glieder wüßte, so sey dieselbe = x, so wird die Summe der Progression seyn $\frac{15}{2}x = 60$; durch 15 dividirt $\frac{1}{2}x = 4$, mit 2 multiplicirt $x = 8$. Da nun die Anzahl der Glieder 8 ist, so setze man den Unterschied = z, so ist das zweyte Glied $5 + z$, das dritte $5 + 2z$ und das achte $5 + 7z$, welches gleich seyn muß 10.
Also hat man $5 + 7z = 10$
und 5 subtrahirt, giebt $7z = 5$
durch 7 dividirt $z = \frac{5}{7}$

Antwort: Der Unterschied der Progression ist $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 8, dahero die Progression selbst seyn wird,

$$\overset{1}{5} + \overset{2}{5\tfrac{5}{7}} + \overset{3}{6\tfrac{3}{7}} + \overset{4}{7\tfrac{1}{7}} + \overset{5}{7\tfrac{6}{7}} + \overset{6}{8\tfrac{4}{7}} + \overset{7}{9\tfrac{2}{7}} + \overset{8}{10}$$

davon die Summe = 60.

35.

XIV. Frage: Suche eine Zahl wenn ich von ihrem Duplo subtrahire 1 und das übrige duplire, davon 2 subtrahire, den Rest durch 4 dividire, daß 1 weniger heraus komme als die gesuchte Zahl?

Die

Die gesuchte Zahl sey x, so ist ihr Duplum 2 x, davon 1 subtrahirt bleibt 2 x − 1, dieses duplirt wird 4x−2, davon subtrahirt 2 bleibt 4x−4 dieses durch 4 dividirt giebt x−1, welches 1 weniger seyn muß als x:

Also x−1=x−1, dieses ist eine Identische Gleichung, und zeiget an, daß x gar nicht bestimmt werde, sondern daß man davor eine jegliche Zahl nach Belieben annehmen könne.

36.

XV. Frage: Ich habe gekauft etliche Ellen Tuch und für jede 5 Ellen gegeben 7 Rthl. Ich habe wieder verkauft je 7 Ellen für 11 Rthl. und gewonnen 100 Rthl. über das Hauptguth: wie viel ist des Tuchs gewesen?

Es seyn gewesen x Ellen: man muß also erst sehen wie viel diese im Einkauf gekostet, welches durch folgende Regeldetri gefunden wird:

5 Ellen kosten 7 Rthl., was kosten x Ellen; Antwort: $\frac{7}{5}$ x Rthl.

so viel Geld hat er ausgegeben. Nun laßt uns sehen, wie viel er wieder eingenommen, dieses geschieht durch diese Regeldetri: 7 Ellen kosten im Verkauf 11 Rthl. was kosten x Ellen, Antwort: $\frac{11}{7}$ x Rthl.

dieses ist die Einnahme, welche um 100 Rthl. größer ist als die Ausgabe, woraus diese Gleichung entspringt:

$\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$

$\frac{7}{5}$ x subtrahirt, bleibt $\frac{6}{35}x = 100$.

mit 35 multiplicirt, kommt $6x = 3500$

durch 6 dividirt wird $x = 583\frac{1}{3}$,

Antwort: Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen, welche erstlich eingekauft worden für $816\frac{2}{3}$ Rthl. hernach sind dieselben wieder verkauft worden für $916\frac{2}{3}$ Rthl. also ist darauf gewonnen worden 100 Rthl.

37.

XVI. Frage: Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthl. davon sind 2 weiße, 3 schwarze, und 7 blaue:

Kostet ein Stück schwarzes Tuch 2 Rthl. mehr als ein weisses, und ein blaues 3 Rthl. mehr als ein schwarzes: ist die Frage wie viel jedes gekostet?

Man setze, ein weisses Stück kostet x Rthl. dahero kosten die zwey weiße Stücke 2 x Rthl. Weiter kostet ein schwarzes Stück $x + 2$ also die drey schwarzen $3x + 6$ und ein blaues Stück $x + 5$ folglich die 7 blauen $7x + 35$

und alle zwölf Stück $12x + 41$

dieselben kosten aber wirklich 140 Rthl.

dahero hat man $12x + 41 = 140$

41 subtrahirt bleibt $12x = 99$

durch 12 dividirt wird $x = 8\frac{1}{4}$

Antwort: ein weisses Stück kostet demnach $8\frac{1}{4}$ Rthl.
ein schwarzes . . . . $10\frac{1}{4}$ Rthl.
ein blaues . . . . . $13\frac{1}{4}$ Rthl.

38.

Frage: Einer hat Muscatennüsse gekauft, und sagt daß 3 Stück eben so viel über 4 Pf. kosten, als 4 Stück mehr kosten als 10 Pf. wie theuer waren dieselben?

Man sage 3 Stücke kosten $x + 4$ Pf. so werden 4 Stücke kosten $x + 10$ Pf. Nun aber nach dem ersten Satz findet man durch die Regeldetri was 4 Stück kosten,

3 Stück : $x + 4$ Pf. = 4 Stück : Antwort $\frac{4x + 16}{3}$

also wird $\frac{4x+16}{3} = x + 10$ oder $4x + 16 = 3x + 30$

3 x subtrahirt giebt $x + 16 = 30$

16 subtrahirt giebt $x = 14$

Antwort: Es kosten 3 Stück 18 Pf. und 4 Stück 24 Pf. folglich 1 Stück hat gekost 6 Pf.

39.

XVIII Frage: Einer hat zwey silberne Becher nebst einem Deckel darzu: der erste Becher wiegt 12

Loth,

Loth, legt man den Deckel darauf so wiegt er zweymal so viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreymal so viel als der erste: hier ist nun die Frage wie viel der Deckel und auch der andere Becher gewogen?

Man setze der Deckel habe gewogen x Loth, so wiegt der erste Becher sammt dem Deckel x + 12 Loth. Da dieses Gewicht zweymal so groß ist, als des andern Bechers, so hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x + 6$: legt man darauf den Deckel so wiegt er $\frac{3}{2}x + 6$ welches 3 mahl 12, das ist 36, gleich seyn muß. Also hat man $\frac{3}{2}x + 6 = 36$ oder $\frac{3}{2}x = 30$ und $\frac{1}{2}x = 10$ und $x = 20$.

Antwort: der Deckel hat gewogen 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth.

40.

XIX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Münze; von der ersten Sorte gehen a Stück auf einen Rthl. von der zweyten Sorte b Stück. Nun kommt einer und will c Stück vor einen Rthl. haben; wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man setze er gebe ihm von der ersten Sorte x Stück und also von der andern c − x Stück. Nun sind aber jene x Stück werth $a : 1 = x : \frac{x}{a}$ Rthl. diese c − x Stück aber sind werth $b : 1 = c - x : \frac{c-x}{b}$ Rthl.

Also muß seyn $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, oder $\frac{bx}{a} + c - x = b$, oder $bx + ac - ax = ab$, und weiter $bx - ax = ab - ac$, folglich wird $x = \frac{ab - ac}{b - a}$ oder $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$,

dahero wird $c - x = \frac{bc - ab}{b - a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$.

Antwort: von der ersten Sorte giebt also der Wechsler $\frac{a(b-c)}{b-a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c-a)}{b-a}$ Stück:

Anmerkung: Diese beyden Zahlen lassen sich leicht durch die Regeldetri finden; nämlich die erste durch diese:

wie $b-a : b-c = a : \frac{ab-ac}{b-a}$

für die zweyte Zahl gilt diese: wie $b-a : c-a = b : \frac{bc-ab}{b-a}$.

Hierbey ist zu merken, daß b grösser ist als a, und c kleiner als b aber größer als a, wie die Natur der Sache erfordert.

41.

XX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Münze; von der ersten gelten 10 Stück einen Rthl. von der andern 20 Stück einen Rthl. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Rthl. wie viel bekommt er von jeder Sorte?

Hier ist also $a = 10$, $b = 20$ und $c = 17$; woraus diese Regeldetrien fließen:

I. $10 : 3 = 10 : 3$, also von der ersten Sorte 3 Stück:
II. $10 : 7 = 20 : 14$, und von der andern Sorte 14 Stück.

42.

XXI. Frage: Ein Vater verläßt nach seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder dergestalt unter sich theilen. Das erste nimmt 100 Rthl. und dazu noch den 10ten Theil des übrigen

Das zweyte nimmt 200 Rthl. und noch darzu den 10ten Theil des übrigen.

Das dritte nimmt 300 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen.

Das vierte nimmt 400 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen

und so fort: solcher gestalt findet es sich, daß das gan-

ze

ze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilet worden. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wie viel Kinder hinterlassen worden, und wie viel ein jedes bekommen?

Diese Frage ist von einer ganz besondern Art und verdienet deswegen bemerket zu werden. Um dieselbe desto leichter aufzulösen, so setze man das ganze hinterlassene Vermögen = z Rthl. und weil alle Kinder gleich viel bekommen, so sey das Antheil eines jeden = x; woraus man sieht, daß die Anzahl der Kinder gewesen $\frac{z}{x}$. Hieraus wollen wir die Auflösung folgender Gestalt anstellen.

Die Maße oder das zu theilende Geld.	Ordnung der Kinder	der Antheil eines jeden.	Die Differenzen
z	das erste	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$z-x$	zweyte	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-2x$	dritte	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-3x$	vierte	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-4x$	fünfte	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$z-5x$	sechste	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	u. s. w.

In der letzten Columne sind hier die Differenzen gesetzt worden, welche entstehen, wenn man ein jedes Erbtheil von dem folgenden subtrahirt. Weil nun

 alle

alle Erbtheile ein ander gleich sind, so muß eine jede von diesen Differenzen seyn = 0. Da es sich nun so glücklich füget, daß alle Differenzen ein ander gleich sind, so ist es genug, daß man eine davon gleich 0 setze, dahero erhalten wir diese Gleichung $100 - \frac{x+100}{10.} = 0.$ Man multiplicire mit 10 so erhält man $1000 - x + 100 = 0$, oder $900 - x = 0$, folglich $x = 900$. Woraus wir schon wissen, daß das Erbtheil eines jeden Kindes 900 Rthl. gewesen. Man nehme nun eine von den Gleichungen in der dritten Columne, welche man will, z. E. die erste $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$, woraus man z so gleich finden kann; denn $9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$ also $z = 8100$, dahero wird $\frac{z}{x} = 9.$

Antwort: Also war die Anzahl der Kinder = 9 das hinterlassene Vermögen = 8100 Rthl. wovon ein jedes Kind bekommt 900 Rthl.

Capitel 4.

Von Auflösung zweyer oder mehr Gleichungen vom ersten Grad.

43.

Oefters geschieht es, daß zwey oder auch mehr unbekannte Zahlen so durch die Buchstaben x, y, z rc. vorgestellt werden, in die Rechnung gebracht werden müssen, da man denn, wenn anders die Frage bestimmt

stimmt ist, auf eben so viel Gleichungen kommt, aus welchen hernach die unbekannten Zahlen gefunden werden müssen. Hier betrachten wir aber nur solche Gleichungen wo nur die erste Potestät der unbekannten Zahl sich findet, und auch keine mit der andern multiplicirt ist. Also daß eine jede Gleichung von dieser Form seyn wird $az + by + cx = d$.

44.

Wir wollen also den Anfang von zwey Gleichungen machen, und daraus zwey unbekannte Zahlen x und y bestimmen, und um die Sache auf eine allgemeine Art zu tractiren, so seyn diese beyden Gleichungen gegeben I. $ax + by = c$ und II. $fx + gy = h$ wo die Buchstaben a, b, c und f, g, h die Stelle bekannter Zahlen vertreten. Hier ist nun die Frage wie man aus diesen beyden Gleichungen die beyden unbekannten Zahlen x und y heraus bringen soll.

45.

Der natürlichste Weg bestehet nun darinn, daß man aus einer jeden Gleichung, den Werth von einer unbekannten Zahl als z. E. von x bestimmt und hernach diese beyde Werthe einander gleich setzt; woraus man eine Gleichung erhält, da nur die unbekannte Zahl y vorkommt, welche man nach den obigen Reguln bestimmen kann. Hat man nun y gefunden, so darf man nur anstatt desselben seinen gefundenen Werth setzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

46.

Dieser Regel zu Folge findet man aus der ersten Gleichung $x = \frac{c - by}{a}$, aus der andern aber findet

man

man $x = \frac{h-gy}{f}$; diese beyden Werthe setze man einander gleich, so erhält man diese neue Gleichung $\frac{c-by}{a} = \frac{h-gy}{f}$

mit a multiplicirt, wird $c-by = \frac{ah-agy}{f}$

mit f multiplicirt wird $fc-fby = ah-agy$
Man addire agy so wird $fc-fby+agy = ah$
Man subtrahire fc so wird $-fby+agy = ah-fc$
oder $(ag-bf)y = ah-fc$

man dividire durch $ag-bf$ so wird $y = \frac{ah-fc}{ag-bf}$

schreibt man nun diesen Werth für y in einem der beyden, so vor x gefunden worden, so erhält man auch den Werth von x. Man nehme den ersten so hat man

erstlich $-by = -\frac{abh+bcf}{ag-bf}$,

hieraus wird $c-by = c-\frac{abh+bcf}{ag-bf}$,

oder $c-by = \frac{acg-bcf-abh+bcf}{ag-bf} = \frac{acg-abh}{ag-bf}$; durch a dividirt

giebt $x = \frac{c-by}{a} = \frac{cg-bh}{ag-bf}$.

47.

I. Frage: Um dieses durch Exempel zu erläutern, so sey diese Frage vorgelegt: Man suche zwey Zahlen deren Summe sey 15 und die Differenz 7?
Es sey die größere Zahl $= x$ und die kleinere $= y$
so hat man I.) $x+y = 15$, und II.) $x-y = 7$.
aus der ersten bekommt man $x = 15-y$ und aus der zweyten $x = 7+y$.

woraus

woraus diese neue Gleichung entspringt $15-y=7+y$,
hier addire man y so hat man $15=7+2y$
man subtrahire 7 so wird $2y=8$
durch 2 dividirt wird $y=4$ und daraus $x=11$.
Antwort: die kleinere Zahl ist 4, die größere aber 11.

48.

II. Frage: Man kann diese Frage auch allgemein machen und zwey Zahlen suchen, deren Summe $=a$ und deren Differenz $=b$ sey.
Es sey die größere $=x$ und die kleinere $=y$
so hat man I.) $x+y=a$ und II.) $x-y=b$,
aus der ersten erhält man $x=a-y$ und aus der zweyten $x=b+y$
woraus diese Gleichung entspringt $a-y=b+y$,
man addire y so hat man $a=b+2y$
man subtrahire b so kommt $2y=a-b$
durch 2 dividirt wird $y=\frac{a-b}{2}$ und hieraus wird

$$x=a-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

Antwort: die größere Zahl ist also $x=\frac{a+b}{2}$ und die kleinere $y=\frac{a-b}{2}$; oder da $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ und $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, so erhält man diesen Lehrsatz; die größere Zahl ist gleich der halben Summe plus der halben Differenz, und die kleinere Zahl ist gleich der halben Summe minus der halben Differenz.

49.

Man kann auch diese Frage auf folgende Weise auflösen: da die beyden Gleichungen sind $x+y=a$ und

und $x-y=b$, so addire man dieselbe so wird $2x=a+b$ und $x=\frac{a+b}{2}$

Hernach von der ersten subtrahire man die zweyte, so bekommt man $2y=a-b$ und $y=\frac{a-b}{2}$, wie vorher.

50.

III. Frage: Ein Maulesel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zwey mal so viel als du; darauf antwortet der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest so hätte ich dreymal so viel als du, wie viel Pud hat ein jeder gehabt?

Der Maulesel habe gehabt x Pud, der Esel aber y Pud. Giebt nun der Maulesel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y+1$ der Maulesel aber behält noch $x-1$, da nun der Esel zweymal so viel hat als der Maulesel so wird $y+1=2x-2$.

Wenn aber der Esel dem Maulesel ein Pud giebt, so bekommt der Maulesel $x+1$ und der Esel behält noch $y-1$. Da nun jene Last dreymal so groß ist als diese, so wird $x+1=3y-3$.

Also sind unsere zwey Gleichungen

I.) $y+1=2x-2$, II.) $x+1=3y-3$,

aus der ersten findet man $x=\frac{y+3}{2}$ und aus der andern

$x=3y-4$,

woraus diese neue Gleichung entspringt $\frac{y+3}{2}=3y-4$,

welche mit 2 multiplicirt giebt $y+3=6y-8$

und y subtrahirt kommt $5y-8=3$

addire

addire 8 so hat man $5y = 11$ und $y = \frac{11}{5}$ oder $2\frac{1}{5}$; hieraus $x = 2\frac{3}{5}$.

Antwort: Also hat der Maulesel gehabt $2\frac{3}{5}$ Pud der Esel aber $2\frac{1}{5}$ Pud.

51.

Hat man drey unbekannte Zahlen, und eben so viel Gleichungen als, z. E. I.) $x + y - z = 8$, II.) $x + z - y = 9$, III.) $y + z - x = 10$, so suche man ebenfalls aus einer jeden den Werth von x,

aus der I.) $x = 8 + z - y$, II.) $x = 9 + y - z$, III.) $x = y + z - 10$.

Nun setze man erstlich den ersten gleich dem andern, und hernach auch gleich dem dritten so erhält man diese zwey neue Gleichungen:

I.) $8 + z - y = 9 + y - z$, II.) $8 + z - y = y + z - 10$.

Es folgt aber aus der ersten $2z - 2y = 1$, und aus der zweyten $2y = 18$, und da erhält man so gleich $y = 9$, welcher Werth in der vorhergehenden vor y geschrieben, giebt $2z - 18 = 1$ und $2z = 19$, dahero $z = 9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x = 8\frac{1}{2}$.

Hier hat es sich gefüget, daß in der letzten Gleichung der Buchstabe z verschwunden, und also y so gleich daraus bestimmt werden konnte. Wäre aber z auch noch darinnen vorgekommen, so hätte man zwey Gleichungen gehabt zwischen z und y, welche nach der ersten Regel aufgelößt werden müßten.

52.

Es seyn die drey folgenden Gleichungen gefunden worden,

I.) $3x + 5y - 4z = 25$, II.) $5x - 2y + 3z = 46$, III.) $3y + 5z - x = 62$.

Man suche aus einer jeden den Werth von x, so hat man

I.) $x = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, II.) $x = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$, III.) $x = 3y + 5z - 62$.

Nun

Nun vergleiche man diese drey Werthe unter sich, so giebt der IIIte und Ite $3y + 5z - 62 = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$,

oder mit 3 multiplicirt $25 - 5y + 4z = 9y + 15z - 186$
addire 186 so kommt $211 - 5y + 4z = 9y + 15z$
$5y$ addirt giebt $211 + 4z = 14y + 15z$
also aus I und III erhält man $211 = 14y + 11z$.

Die IIte und IIIte giebt $3y + 5z - 62 = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$

oder $46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$ und man findet aus dieser Gleichung $356 = 13y + 28z$.
aus einer jeden dieser beyden Gleichungen suche man den Werth für y

I.) $211 = 14y + 11z$, wo $11z$ subtrahirt, bleibt $14y = 211 - 11z$ oder $y = \frac{211 - 11z}{14}$

II.) $356 = 13y + 28z$, wo $28z$ subtrahirt, bleibt $13y = 356 - 28z$ oder $y = \frac{356 - 28z}{13}$

diese zwey Werthe einander gleich gesetzt, geben:
$\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13}$, mit 13. 14 multiplicirt wird
$2743 - 143z = 4984 - 392z$
und $392z$ addirt, giebt $249z + 2743 = 4984$ oder $249z = 2241$ und also $z = 9$.
Hieraus erhält man $y = 6$, und endlich $x = 7$.

53.

Sollten mehr als drey unbekannte Zahlen, und eben so viel Gleichungen vorkommen, so könnte man die Auflösung auf eine ähnliche Art anstellen, welches gemeiniglich auf verdrießliche Rechnungen leiten würde.

Es pflegen sich aber bey einem jeglichen Fall solche Mittel zu äußern, wodurch die Auflösung ungemein erleichtert wird, und solches geschieht, indem man außer den Haupt unbekannten Zahlen noch eine neue willkührliche, als z. E. die Summe aller in die Rechnung mit einführet, welches von einem der sich in dergleichen Rechnungen schon ziemlich geübet hat, in einem jeglichen Fall leicht beurtheilet wird. Zu diesem Ende wollen wir einige dergleichen Exempel anführen.

54.

IV. Frage: Drey spielen mit einander, im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beyden andern so viel, als ein jeder von den zwey andern an Gelde bey sich hatte. Im andern Spiel verliert der zweyte an den ersten und dritten so viel als ein jeder hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und zweyten so viel ein jeder hatte, und da findet es sich, daß alle nach geendigtem Spiel gleich viel haben, ein jeder nämlich 24 Fl. Nun ist die Frage, wie viel ein jeder anfänglich gehabt habe?

Man setze der erste habe gehabt x Fl. der zweyte y und der dritte z. Ueber dieses setze man die Summe aller Fl. zusammen $x + y + z = s$. Da nun im ersten Spiel der erste so viel verliert als die beyden andern haben, und der erste x hat, so haben die beyden andern $s - x$, und so viel verliert der erste, daher ihm noch übrig bleiben $2x - s$: der zweyte aber wird haben $2y$ und der dritte $2z$.

Also nach dem ersten Spiel wird ein jeder haben wie folget: der I.) $2x - s$, der II.) $2y$, der III.) $2z$.

Im zweyten Spiel verliert der andere, der nun $2y$ hat, an die beyden andern, so viel als sie haben, oder $s - 2y$. Dahero der zweyte noch behält $4y - s$; die beyden andern aber werden zweymal so viel haben als vorher.

Also nach dem zweyten Spiel wird haben:
der I.) $4x - 2s$, der II.) $4y - s$, der III.) $4z$.

Im dritten Spiel verliert der dritte, der jetzt $4z$ hat, an die andern beyde so viel sie haben, sie haben aber $s - 4z$; also behält der dritte noch $8z - s$, und die beyden übrigen bekommen doppelt so viel als sie hatten. Also wird nach dem dritten Spiele ein jeder haben:
der I.) $8x - 4s$, der II.) $8y - 2s$, und der III.) $8z - s$, da nun jetzt ein jeder 24 Fl. hat, so erhalten wir drey Gleichungen, welche so beschaffen sind, daß man aus der ersten so gleich x, aus der andern y und aus der dritten z finden kann, insonderheit da jetzt s eine bekannte Zahl ist, indem alle zusammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieses wird sich von selbst geben, ohne daß man nöthig habe darauf zu sehen.

Diese Rechnung wird demnach also stehen:
I.) $8x - 4s = 24$, oder $8x = 24 + 4s$, oder $x = 3 + \frac{1}{2}s$.
II.) $8y - 2s = 24$, oder $8y = 24 + 2s$, oder $y = 3 + \frac{1}{4}s$.
III.) $8z - s = 24$, oder $8z = 24 + s$, oder $z = 3 + \frac{1}{8}s$.

man addire diese 3 Werthe, so bekommt man
$x + y + z = 9 + \frac{7}{8}s$,
da nun $x + y + z = s$, so hat man $s = 9 + \frac{7}{8}s$:
$\frac{7}{8}s$ subtrahirt bleibt $\frac{1}{8}s = 9$ und $s = 72$.
Antwort: Also vom Anfange des Spiels hatte der erste 39 Fl. der zweyte 21 Fl. und der dritte 12.

Aus dieser Auflösung sieht man, wie durch Hülfe der Summe der drey unbekannten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Wege geräumet worden.

55.

So schwer diese Frage scheinet, so ist doch zu merken, daß dieselbe so gar ohne Algebra aufgelöset werden kann.

Man

Man darf nur in Betrachtung derselben rückwärts gehen: denn da die drey Personen nach dem dritten Spiele gleich viel bekommen haben, nämlich der erste 24 der zweyte 24, der dritte 24; im dritten Spiel aber der erste und zweyte ihr Geld verdoppelt haben, so müssen sie vor dem dritten Spiele gehabt haben, wie folget:

I.) 12, II.) 12, III.) 48.

Im zweyten Spiel hat der erste und dritte sein Spiel verdoppelt, also müssen sie vor dem zweyten Spiele gehabt haben.

I.) 6, II.) 42, III.) 24.

Im ersten Spiele hat der zweyte und dritte sein Geld verdoppelt, also vor dem ersten Spiele haben sie gehabt.

I.) 39, II.) 21, III.) 12.

und eben so viel haben wir auch vorher für den Anfang des Spiels gefunden.

56.

V. Frage: Zwey Personen sind schuldig 29 Rub. und es hat zwar ein jeder Geld, doch nicht so viel, daß er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte, darum spricht der erste zu dem andern; giebst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, so könnte ich die Schuld so gleich allein bezahlen: der andere antwortet dagegen, giebst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so könnte ich die Schuld allein bezahlen: wie viel Geld hat jeder gehabt?

Der erste habe gehabt x Rub. der andere y Rub.

Also bekommt man erstlich $x + \frac{2}{3}y = 29$

hernach auch $y + \frac{3}{4}x = 29$.

Aus dem ersten findet man $x = 29 - \frac{2}{3}y$,

aus dem zweyten $x = \frac{116 - 4y}{3}$.

Aus diesen beyden Werthen entsteht diese Gleichung:

$29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 4y}{3}$, also $y = 14\frac{1}{2}$: dahero wird $x = 19\frac{1}{3}$:

Antwort: der erste hat gehabt $19\frac{1}{3}$ der zweyte $14\frac{1}{2}$ Rub.

57.

VI. Frage: Drey haben ein Haus gekauft für 100 Rthl. der erste begehrt vom andern $\frac{1}{2}$ seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen: der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen. Der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Geldes, so möchte er das Haus allein bezahlen. Wie viel hat jeder Geld gehabt?

Der erste habe gehabt x, der zweyte y, der dritte z Rthl. so bekommt man folgende drey Gleichungen I.) $x + \frac{1}{2}y = 100$. II.) $y + \frac{1}{3}z = 100$. III.) $z + \frac{1}{4}x = 100$, aus welchen der Werth von x gefunden wird:

I.) $x = 100 - \frac{1}{2}y$, III.) $x = 400 - 4z$,

hier konnte nämlich aus der zweyten Gleichung x nichts bestimmt werden.

Die beyden Werthe aber geben diese Gleichung:

$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$, oder $4z - \frac{1}{2}y = 300$

welche mit der zweyten verbunden werden muß, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweyte Gleichung $y + \frac{1}{3}z = 100$; woraus gefunden wird $y = 100 - \frac{1}{3}z$; aus der oben gefundenen Gleichung $4z - \frac{1}{2}y = 300$ aber ist bekannt $y = 8z - 600$ woraus diese letzte Gleichung entspringt:

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$, also $8\frac{1}{3}z = 700$, oder $\frac{25}{3}z = 700$, und $z = 84$, hieraus findet man $y = 100 - 28$, oder $y = 72$, und endlich $x = 64$.

Antwort: der erste hat gehabt 64 Rthl. der zweyte 72 Rthl. der dritte 84 Rthl.

58. Da

58.

Da bey diesem Exempel in einer jeden Gleichung nur zwey unbekannte Zahlen vorkommen, so kann die Auflösung auf eine bequemere Art angestellet werden.

Denn man suche aus der ersten $y = 200 - 2x$, welches also durch x bestimmt wird, diesen Werth schreibe man vor y in der zweyten Gleichung, so hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, 100 subtrahirt, so bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und $z = 6x - 300$.

Also ist auch z durch x bestimmt: diesen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, so kommt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur x allein vorkommt, und also $25x - 1600 = 0$ dahero $x = 64$, folglich $y = 200 - 128 = 72$
und $z = 384 - 300 = 84$.

59.

Eben so kann man verfahren, wenn auch mehr solche Gleichungen vorkommen: also wenn man auf eine allgemeine Art hat.

$$\text{I.)}\ u + \frac{x}{a} = n,\ \text{II.)}\ x + \frac{y}{b} = n,\quad \text{III.)}\ y + \frac{z}{c} = n,$$

$$\text{IV.)}\ z + \frac{u}{d} = n,$$

oder nach dem man die Brüche weggebracht diese:
I.) $au + x = an$, II.) $bx + y = bn$, III.) $cy + z = cn$
IV.) $dz + u = dn$.

Hier bekommen wir aus der ersten $x = an - au$, welcher Werth in der zweyten giebt $abn - abu + y = bn$ also $y = bn - abn + abu$; dieser Werth in der dritten giebt $bcn - abcn + abcu + z = cn$, also $z = cn - bcn + abcn - abcu$; dieser endlich in der vierten Glei-

chung giebt $cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn$. Also wird $dn - cdn + bcdn - abcdn = - abcdu + u$ oder $(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$ woraus man erhält $u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$.

Hieraus findet man ferner wie folget:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n.\frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n.\frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n.\frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n.\frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

60.

VII. Frage: Ein Hauptmann hat drey Compagnien Soldaten. In einer sind Schweizer, in der andern Schwaben, in der dritten Sachsen; mit diesen will er eine Stadt bestürmen, und verspricht zur Belohnung 901 Rthl. also auszutheilen:

Daß von der Compagnie, die den Sturm thut, ein jeder 1 Rthl. bekommen, das übrige Geld aber unter die beyden andern Compagnien gleich vertheilet werden soll.

Nun findet es sich, daß wenn die Schweizer den Sturm thäten, ein jeder von den beyden andern $\frac{1}{2}$ Rthl. bekäme; wenn aber die Schwaben den Sturm thäten, ein jeder der beyden andern $\frac{1}{3}$ Rthl. bekommen würde. Thäten aber die Sachsen den Sturm, so würde

würde ein jeder der beyden andern $\frac{1}{4}$ Rthl. bekommen. Nun ist die Frage, aus wie viel Köpfen eine jede Compagnie bestanden?

Man setze nun, die Zahl der Schweizer sey gewesen x Köpfe, der Schwaben y und der Sachsen z.

Ferner setze man die Anzahl aller $x + y + z = s$, weil leicht vorher zu sehen, daß dadurch die Rechnung gar sehr erleichtert wird. Denn wenn die Schweizer den Sturm thun, deren Anzahl $= x$, so ist die Zahl der beyden übrigen $= s - x$, da nun jene 1 Rthl. diese aber einen halben Rthl. bekommen, so wird $x + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}x = 901$.

Eben so wenn die Schwaben Sturm laufen, so wird $y + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}y = 901$,

und endlich wenn die Sachsen Sturm laufen, so wird $z + \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}z = 901$ seyn.

Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchstaben x, y und z bestimmt werden kann;

Denn aus der ersten erhält man $x = 1802 - s$,

aus der andern $2y = 2703 - s$,

aus der dritten $3z = 3604 - s$.

Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von 6x, 6y, und 6z.

$$6x = 10812 - 6s$$
$$6y = 8109 - 3s$$
$$6z = 7208 - 2s$$

addirt: $6s = 26129 - 11s$, oder $17s = 26129$ woraus gefunden wird $s = 1537$, welches die Anzahl aller Köpfe ist, und daraus findet man ferner:

$x = 1802 - 1537 = 265$

$2y = 2703 - 1537 = 1166$ und $y = 583$

$3z = 3604 - 1537 = 2067$ und $z = 689$.

Antwort: die Compagnie der Schweizer bestand also aus 265 Mann, die Schwaben aus 583, und die Sachsen aus 689 Mann.

Capitel 5.

Von der Auflösung der reinen Quadratischen Gleichungen.

61.

Eine Gleichung wird Quadratisch genennt, wenn darinn das Quadrat oder die zweyte Potestät der unbekannten Zahl vorkommt, wenn sich nur keine höhere Potestäten davon darinn befinden. Denn sollte darinn auch die dritte Potestät vorkommen, so wird eine solche Gleichung schon zu den Cubischen gerechnet, wovon die Auflösung besondere Regeln erfordert.

62.

In einer Quadratischen Gleichung kommen also nur dreyerley Glieder vor: zum ersten solche Glieder, worinnen die unbekannte Zahl gar nicht enthalten ist, oder welche blos allein aus bekannten Zahlen zusammen gesetzt sind.

Zweytens solche Glieder, in welchen nur die erste Potestät der unbekannten Zahl vorkommt.

Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten ist.

Also, wenn x die unbekannte Zahl andeutet, die Buchstaben a, b, c, d etc. aber bekannte Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a, von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cxx.

63.

Man hat schon zur Gnüge gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art, in ein einiges zusammen gezo-

gezogen, oder als ein einiges Glied betrachtet werden können.

Also kann diese Form $axx - bxx + cxx$ als ein einziges Glied angesehen, und also vorgestellet werden $(a - b + c) xx$ weil in der That $a - b + c$ eine bekannte Zahl ausdrückt:

Wenn sich auch solche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens = befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eines zusammen gezogen werden können:
Also wenn diese Gleichung vorkommt
$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$;
so subtrahirt man erstlich $2xx$, so kommt
$-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$;
hernach addire man $8x$, so hat man $5x + 4 = 3xx + 11$; und 11 subtrahirt giebt $3xx = 5x - 7$.

64.

Man kann auch alle Glieder auf einer Seite des Zeichens = bringen, so daß auf der andern Seite 0 zu stehen kommt; wobey zu bemerken, daß wenn Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müssen:

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen $3xx - 5x + 7 = 0$ und so wird auch insgemein eine jegliche Quadratische Gleichung durch diese Form vorgestellt werden können

$$axx \pm bx \pm c = 0,$$

wo das Zeichen $\pm$ durch plus oder minus ausgesprochen wird, um anzuzeigen, daß solche Glieder bald Positiv bald Negativ seyn können.

65.

Es mag eine Quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf

diese Form, welche nur aus drey Gliedern bestehet, gebracht werden; wenn man z. E. auf diese Gleichung gekommen wäre:

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$ so müßten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden; also multiplicire man mit $cx + d$ so bekommt man $ax + b = \frac{cexx + cfx + edx + fd}{gx + h}$ hier mit $gx + h$ multiplicirt, giebt

$agxx + bgx + ahx + bh = ce\,xx + cfx + edx + fd$

welches eine Quadratische Gleichung ist, und auf folgende drey Glieder gebracht werden kann, wenn alle auf eine Seite gesetzt werden, und welche man also unter einander zu schreiben pfleget:

$$\begin{aligned} o = agxx &+ bgx + bh \\ - cexx &+ ahx - fd \\ &- cfx \\ &- edx \end{aligned}$$

oder um dieselbe noch deutlicher vorzustellen

$o = (ag - ce)\,xx + (bg + ah - cf - ed)\,x + bh - fd.$

66.

Dergleichen Quadratische Gleichungen worinn von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genennt, und die Auflösung derselben ist auch mehr Schwierigkeiten unterworfen, daher wir erstlich solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von diesen dreyen Gliedern mangelt. Sollte nun das Glied xx gar nicht vorhanden seyn, so wäre die Gleichung nicht einmahl Quadratisch, und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, so blos bekannte Zahlen enthält, mangeln, so würde die Gleichung also aussehen $axx \pm bx = o$, wo man durch x theilen kann, und daher zu dieser Gleichung kommt $ax \pm b = o$,

welche

welche wieder eine einfache Gleichung ist, und nicht hieher gehört.

67.

Wenn aber das mittlere Glied, so nur die erste Potestät des x enthält, mangelt, so bekommt die Gleichung diese Form: $axx \pm c = 0$, oder $axx = c$, es mag nun c das Zeichen + oder − haben;

Eine solche Gleichung wird eine reine Quadratische genennt, weil ihre Auflösung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Denn man darf nur durch a theilen, so bekommt man $xx = \frac{c}{a}$; und beyderseits die Quadrat-Wurzel genommen, so hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelöset worden.

68.

Hier sind nun drey Fälle zu erwegen. Der erste wenn $\frac{c}{a}$ eine Quadrat-Zahl ist, davon sich die Wurzel wirklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rational-Zahl ausgedrückt, dieselbe mag ganz oder gebrochen seyn.
Also aus dieser Gleichung $xx = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist, wenn $\frac{c}{a}$ keine Quadrat-Zahl ist, da man sich denn mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Also wenn $xx = 12$, so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben.

Ist

Ist aber drittens $\frac{a}{c}$ gar eine Negativ-Zahl, so wird der Werth von x ganz und gar unmöglich oder Imaginär und zeiget an, daß die Frage, welche auf eine solche Gleichung geführet, an sich unmöglich sey.

69.

Ehe wir weiter gehen, ist noch zu bemerken, daß so oft aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte, und so wohl Positiv als Negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wenn man auf diese Gleichung kommt $xx = 49$, so ist der Werth von x nicht nur $+ 7$ sondern auch $- 7$, und pflegt dahero also angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulassen, in vielen Fällen aber, wo etwann von einer Anzahl Menschen die Frage ist, fällt der Negative Werth von selbsten weg.

70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl mangelt, lassen die Gleichungen $axx = bx$ immer zweyerley Werthe vor x zu, obgleich nur einer gefunden wird, wenn man durch x dividirt. Denn wenn z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 3x$ wo ein solcher Werth für x gegeben werden soll, daß xx dem 3x gleich werde, so geschieht dieses, wenn man setzt $x = 3$ welcher Werth heraus kommt, wenn man durch x dividirt, allein außer diesem leistet auch der Werth $x = 0$ ein Genügen; denn da wird $xx = 0$ und $3x = 0$. Dieses ist bey allen quadratischen Gleichungen zu merken, daß immer zwey Auflösungen statt finden, dahingegen bey den einfachen Gleichungen, nie mehr als eine Platz hat.

Wir

Wir wollen nun diese reine Quadratische Gleichungen durch einige Exempel erläutern.

71

I. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihren $\frac{1}{3}$ multiplicirt 24 gebe?

Es sey diese Zahl $= x$ so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt $\frac{1}{6}xx = 24$.

Mit 6 multiplicirt wird $xx = 144$ und Quadratwurzel ausgezogen $x = \pm 12$. Denn wenn $x = + 12$, so ist $\frac{1}{2}x = + 6$ und $\frac{1}{3}x = + 4$, wovon das Product 24 ist. Ebenfalls wenn $y = - 12$ so ist $\frac{1}{2}x = - 6$ und $\frac{1}{3}x = - 4$ und das Product davon auch 24.

72.

II. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, wenn zu derselben erstlich 5 addirt und hernach auch 5 subtrahirt und die Summe mit dem Rest multiplicirt wird; 96 heraus komme?

Es sey diese Zahl x so muß $x + 5$ mit $x - 5$ multiplicirt 96 geben, woraus diese Gleichung entspringt $xx - 25 = 96$

Man addire 25 so wird $xx = 121$

und die Quadratwurzel ausgezogen $x = 11$

denn da wird $x + 5 = 16$ und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6.16 = 96$.

73.

III. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, daß wenn dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt 51 gebe?

Es sey die Zahl x so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht $100 - xx = 51$.

Man addire xx und subtrahire 51, so kommt xx=49, wovon die Quadratwurzel anzeigt x=7.

74.

IV. Frage: Es haben drey Personen Geld, so oft der erste hat 7 Rthl. hat der andere 3 Rthl. und so oft der andere hat 17 Rthl. hat der dritte 5 Rthl. so ich aber das Geld des ersten mit dem Geld des andern, und das Geld des andern mit dem Geld des dritten und auch endlich das Geld des dritten mit dem Geld des ersten multiplicire, hernach diese drey Producte zusammen addire, so wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ seyn. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man setze, der erste habe gehabt x Rthl. und da gesagt wird, daß so oft der erste 7 Rthl. habe, so habe der andere 3 Rthl. so will dieses so viel sagen, daß das Geld des ersten sich zum Geld des andern verhalte wie 7: 3.

Man setze also wie 7: 3 = x zum Geld des andern, welches seyn wird $\frac{3}{7}$ x.

Da ferner das Geld des andern sich verhält zum Geld des dritten, wie 17: 5,

so setze man, wie 17: 5 = $\frac{3}{7}$ x zum Geld des dritten, welches seyn wird $\frac{15}{119}$ x.

Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Geld des andern $\frac{3}{7}$ x so wird das Product = $\frac{3}{7}$ xx.

Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}$ x mit dem Geld des dritten $\frac{15}{119}$ x multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}$ xx.

Und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}$ x mit dem Geld des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}$ xx. Diese drey Producte zusammen machen $\frac{3}{7}$ xx + $\frac{45}{833}$ xx + $\frac{15}{119}$ xx, welche unter einen Nenner gebracht, geben $\frac{507}{833}$ xx, so der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß:

Also hat man $\frac{507}{833}$ xx = $3830\frac{2}{3}$

mit 3 multiplicirt, so bekommt man $\frac{1521}{833}$ xx = 11492

ferner

ferner mit 833 multiplicirt, giebt 1521 $xx = 9572836$ und durch 1521 dividirt, wird $xx = \frac{9572836}{1521}$ woraus die Quadratwurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt und da kommt $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$: daher erhält man ferner $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Antwort: Also hat der erste $79\frac{1}{3}$ Rthl. der zweyte 34 Rthl. und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Anmerkung: diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wenn man die darinn vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflöset, und dabey insonderheit ihre Quadrate bemerkt:

Also ist $507 = 3 \cdot 169$, wo 169 das Quadrat von 13 ist; hernach ist $833 = 7 \cdot 119$ und $119 = 7 \cdot 17$ da man nun hat, $\frac{3 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 3830\frac{2}{3}$ so multiplicire man mit 3, da kommt $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 11492$. Diese Zahl löse man auch in ihre Factores auf, wovon der erste 4 so gleich in die Augen fällt, also daß $11492 = 4 \cdot 2873$: ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird $2873 = 17 \cdot 169$, daher unsere Gleichung also aussieht:

$\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17 \cdot 169$, welche durch 169 dividirt, wird: $\frac{9}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17$; ferner mit $17 \cdot 49$ multiplicirt und durch 9 dividirt giebt $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, wo alle Factores Quadrate sind und also die Wurzel seyn wird $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben.

75.

V. Frage: Etliche Kaufleute bestellen einen Factor, schicken ihn nach Archangel zu halten einen Handel, haben eingelegt jeder zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind. Gewinnt der Factor je mit 100 Rthl. zweymal so viel als der Personen sind. Wenn

man

man denn $\frac{1}{100}$ Theil des ganzen Gewinnsts multiplicirt mit $2\frac{2}{9}$ so kommt die Zahl der Gesellen heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sey $= x$ und da ein jeder $10\,x$ Rthl. eingelegt hat, so war das ganze Capital $= 10\,xx$ Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl. $2\,x$ Rthl. folglich gewinnt er $\frac{1}{5}\,x^3$ mit dem ganzen Capital $10\,xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Gesellen x gleich seyn muß:

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225\,x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: es sind dahero in allen 15 Gesellen gewesen und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

Capitel 6.

Von der Auflösung der vermischten Quadratischen Gleichungen.

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wenn in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nämlich solche, welche das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten, wie axx; hernach auch solche, worinn die unbekannte Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens = gebracht

bracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$a xx \mp bx \mp c = 0$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied bloß allein das reine Quadrat der unbekannten Zahl xx enthalte: hernach lasse man das zweyte Glied auf eben der Seite wo xx steht, das bekannte Glied aber bringe man auf die andere Seite. Solcher Gestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx \pm px = \pm q$, wo p und q bekannte Zahlen, sowohl positive als negative andeuten; und jetzo kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von x gefunden werden soll. Hierbey ist zuerst zu bemerken, daß wenn $xx + px$ ein wirkliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte beyderseits die Quadratwurzel zu nehmen.

78.

Es ist aber klar, daß $xx + px$ kein Quadrat seyn kann, weil wir oben gesehen, daß wenn die Wurzel aus zwey Gliedern besteht, z. E. $x + n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nämlich außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, also daß das Quadrat von $x + n$ seyn wird $xx + 2nx + nn$. Da wir nun auf einer Seite schon haben $xx + px$ so können wir xx als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß px das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel x mit dem andern Theil seyn; daher der an-

dere Theil $\frac{1}{2}p$ seyn muß, wie denn auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ gefunden wird $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Da nun $xx + px + \frac{1}{4}pp$ ein wirkliches Quadrat ist, wovon die Wurzel $x + \frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx + px = q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren und da bekommen wir $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein wirkliches Quadrat, auf der andern aber bloß bekannte Zahlen befindlich sind. Wenn wir daher beyderseits die Quadratwurzel nehmen, so erhalten wir $x + \frac{1}{2}p = \surd(\frac{1}{4}pp + q)$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x = -\frac{1}{2}p + \surd(\frac{1}{4}pp + q)$; und da eine jede Quadratwurzel so wohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für x zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen:
$x = -\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}pp + q)$.

80.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadratgleichungen aufgelöset werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genug, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtnisse wohl einpräge. Man kann demnach die Gleichung so anordnen, daß das bloße Quadrat xx auf einer Seite zu stehen komme, daher die obige Gleichung diese Form erhalten wird: $xx = -px + q$ wovon der Werth von x so gleich also hingeschrieben werden kann:
$x = -\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}pp + q)$.

81.

Hieraus wird nun diese allgemeine Regel gezogen um die Gleichung $xx = -px + q$ aufzulösen.

Man

Man sieht nämlich, daß die unbekannte Zahl, x gleich seyn werde der Hälfte der Zahl, womit x auf der andern Seite multiplicirt ist, und über das noch + oder − der Quadratwurzel aus dem Quadrat der Zahl, so eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl so das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wenn daher diese Gleichung vorkäme $xx = 6x + 7$, so würde man so gleich haben $x = 3 \pm \sqrt{(9+7)} = 3 \pm 4$: folglich sind die beyden Werthe von x I.) $x = 7$, und II.) $x = -1$.

Hätte man diese Gleichung $xx = 10x - 9$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{(25-9)}$, welches $= 5 \pm 4$; daher die beyden Werthe seyn werden $x = 9$ und $x = 1$.

82.

Zu mehrerer Erläuterung dieser Regel können folgende Fälle unterschieden werden, I.) wenn p eine gerade Zahl ist, II.) wenn p eine ungerade Zahl ist, und III.) wenn p eine gebrochene Zahl ist.

Es sey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen:
$xx = 2px + q$, so bekommt man $x = p \pm \sqrt{(pp+q)}$:

Es sey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $xx = px + q$, da denn seyn wird
$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ da nun $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadratwurzel gezogen werden kann, so bekommt man $x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp+4q)}}{2}$ oder $x = \frac{p \pm \sqrt{(pp+4q)}}{2}$.

Wird aber III.) p ein Bruch, so kann die Auflösung folgender Gestalt geschehen. Es sey die Quadratische Gleichung $axx = bx + c$, oder $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$,

so wird nach der Regel $x = \frac{b}{2a} \pm \surd \left\{ \frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} \right\}$. Da nun aber $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb + 4ac}{4aa}$ und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird $x = \frac{b \pm \surd (bb + 4ac)}{2a}$.

83.

Der andere Weg welcher auch zu dieser Auflösung führet, bestehet darinn, daß man eine solche vermischte Quadratische Gleichung nämlich:
$xx = px + q$ in eine reine verwandele, welches geschiehet, wenn man anstatt der unbekannten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, also daß $x = y + \frac{1}{2}p$; da man denn, wenn y gefunden worden, auch so gleich den Werth vor x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ und $px = py + \frac{1}{2}pp$: hieraus wird unsere Gleichung also zu stehen kommen
$yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q$
subtrahirt man hier erstlich py, so hat man
$yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$
ferner $\frac{1}{4}pp$ subtrahirt, giebt $yy = \frac{1}{4}pp + q$, welches eine reine quadratische Gleichung ist, woraus man so gleich erhält $y = \pm \surd (\frac{1}{4}pp + q)$.
Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, so wird $x = \frac{1}{2}p \pm \surd (\frac{1}{4}pp + q)$, wie wir schon oben gefunden haben. Es ist also nichts mehr übrig als diese Regel mit Exempeln zu erläutern.

84.

I. Frage: Ich habe zwey Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere und ihr Product macht 91, welches sind diese Zahlen?

Die

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere x + 6 und ihr Product $xx+6x=91$.
Man subtrahire 6x, so hat man $xx=-6x+91$, und nach der Regel $x=-3\pm\sqrt{(9+91)}=-3\pm10$, daher hat man entweder $x=7$ oder $x=-13$.
Antwort: die Frage hat also zwey Auflösungen; nach der ersten ist die kleinere Zahl $x=7$ die größere $x+6=13$

Nach der andern aber ist die kleinere $x=-13$ und die größere $x+6=-7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl wenn ich von ihrem Quadrat subtrahire 9, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23: welche Zahl ist es?

Es sey die Zahl x, so ist $xx-9$ über 100 um $xx-109$. Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23-x$; woraus diese Gleichung entsteht $xx-109=23-x$
Man addire 109 so wird $xx=-x+132$ folglich nach der Regel $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+132)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$
Also ist entweder $x=11$, oder $x=-12$

Antwort: Wenn nur eine positive Antwort verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl 11 ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicire und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen?

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}xx$ giebt; also soll $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$ seyn; mit 6 multiplicirt, wird $xx+3x=180$, oder $xx=-3x+180$, woraus man findet



$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$

Daher ist entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Dupla, wenn ich ihre Summe zu ihrem Product addire daß 90 komme?

Es sey die Zahl x, so ist die größere 2x, ihr Product 2xx, dazu ihre Summe 3x addirt soll geben 90. Also $2xx + 3x = 90$, und 3x subtrahirt,

$2xx = -3x + 90$

durch 2 dividirt, giebt $xx = -\frac{3}{2}x + 45$; woraus nach der Regel gefunden wird $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + 45)}$
$= -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}$.

Daher ist entweder $x = 6$ oder $x = -7\frac{1}{2}$.

88.

V. Frage: Einer kauft ein Pferd für etliche Rthl. verkauft dasselbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran von 100 so viel Rthl. als das Pferd gekostet, ist die Frage wie theuer dasselbe eingekauft worden?

Daß Pferd habe gekostet x Rthl. weil er nun darauf x Proc. gewonnen, so setze man, mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x? Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber x gewesen, so muß er dasselbe für $x + \frac{xx}{100}$ verkauft haben. Dahero wird $x + \frac{xx}{100} = 119$.

Man subtrahire x, so kommt $\frac{xx}{100} = -x + 119$

und mit 100 multiplicirt, wird $xx = -100x + 11900$, woraus nach der Regel gefunden wird

$x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400}$
$= -50 \pm 120$.

Antwort:

Antwort: das Pferd hat also gekostet 70 Rthl. weil er nun darauf 70 Procent gewonnen, so war der Gewinnst 49 Rthl. er muß also dasselbe verkauft haben vor $70 + 49$, das ist für 119 Rthl. wie wirklich geschehen.

89.

VI. Frage: Einer kauft eine gewisse Anzahl Tücher: das erste für 2 Rthl. das zweyte für 4 Rthl. das dritte für 6 Rthl. und immer 2 Rthl. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthl. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seyn x Tücher gewesen, und wie viel er für jedes bezahlt hat, zeiget die folgende Vorstellung an:
für das 1, 2, 3, 4, 5 . . . x
zahlt er 2, 4, 6, 8, 10 . . . 2x Rthl.

Man muß also diese Arithmetische Progression $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots 2x$ welche aus x Gliedern besteht summiren, um den Preiß aller Tücher zusammen zu finden.

Nach der oben gegebenen Regel also addire man das erste und letzte Glied zusammen, so bekommt man $2x+2$. Dieses multiplicire man mit der Anzahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe $2xx + 2x$. Daher die Summe selbst seyn wird $xx + x$, welche dem 110 gleich seyn muß, oder $xx+x=110$
Man subtrahire x, so wird $xx=-x+110$
folglich $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}+110)}$ oder $= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{441}{4}}$
oder $x = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10$
Antwort: Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90.

VII. Frage: Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthl. wären der Tücher 3 mehr gewesen vor eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Rthl. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

 Es

Es seyn x Tücher gewesen, so hat das Stück wirklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthl. Hätte er aber $x+3$ Stück für 180 Rthl. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthl. welcher Preis um 3 Rthl. weniger ist, als der wirkliche, woraus diese Gleichung entsteht:

$$\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$$

man multiplicire mit x, so kommt $\frac{180x}{x+3}=180-3x$

durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3}=60-x$

mit $x+3$ multiplicirt, wird $60x=180+57x-xx$
man addire xx, so kommt $xx+60x=180+57x$.
Man subtrahire 60x, so kommt $xx=-3x+180$. Hieraus nach der Regel
$x=-\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}+180)}$, oder $x=-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=12$.
Antwort: Also sind 12 Tücher für 180 Rthl. gekauft worden, daher eines gekostet 15 Rthl. Hätte man aber 3 Stück mehr nämlich 15 Stück für 180 Rthl. bekommen, so wird 1 Stück gekostet haben 12 Rthl., folglich 3 Rthl. weniger als in der That.

91.

VIII. Frage: Zwey haben eine Gesellschaft, legen zusammen 100 Rthl. ein, der erste läßt sein Geld 3 Monath lang, der andere aber 2 Monath lang stehen, und zieht ein jeder mit Capital und Gewinnst 99 Rthl. wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe eingelegt x Rthl. und also der andere $100-x$: da nun der erste 99 Rthl. zurück zieht, so ist sein Gewinn $99-x$, welcher in 3 Monathen mit dem

dem Capital x ist erworben worden, da der andere auch 99 Rthl. zurück zieht, so war sein Gewinn x−1, welcher in zwey Monathen mit dem Capital 100 − x erworben worden: mit eben diesem Capital 100 − x würden also in 3 Monathen gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$.

Nun sind diese Gewinnste denen Capitalen proportional, nämlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinnst, wie dieses Capital zu diesem Gewinnst; also

$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x-3}{2}$

Man setze das Product der äußern gleich dem Product der mittlern, so hat man $\frac{3xx-3x}{2} = 9900 - 199x + xx$ und mit 2 multiplicirt $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$; man subtrahire $2xx$ so kommt $xx - 3x = 19800 - 398x$ und $3x$ addirt $xx = -395x + 19800$. Daher nach der Regel $x = -\frac{395}{2} + \sqrt{\left(\frac{156025}{4} + \frac{79200}{4}\right)}$ das ist $x = -\frac{395}{2} + \frac{485}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

Antwort: der erste hat also eingelegt 45 Rthl. und der andere 55 Rthl. mit den 45 Rthl. hat der erste in 3 Monath gewonnen 54 Rthl. würde demnach in einem Monath gewonnen haben 18 Rthl. Der andere aber gewinnt mit 55 Rthl. in 2 Monath 44 Rthl. würde also in einem Monath gewonnen haben 22 Rthl. welches auch mit jenem übereinstimmt; denn wenn mit 45 Rthl. gewonnen werden 18 in einem Monath, so werden mit 55 in gleicher Zeit gewonnen 22 Rthl.

92.

IX. Frage: Zwey Bäurinnen tragen zusammen 100 Eyer auf den Markt, eine mehr wie die andere, und lösen doch beyde gleich viel Geld: Spricht die erste zu der andern, hätte ich deine Eyer gehabt, so

hätte ich 15 Kreuzer gelöst: darauf antwortet die andere, hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst: wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe gehabt x Eyer und also die andere 100 − x.

Also da nun die erste 100 − x Eyer für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regel detrie

$100 - x : 15 = x$ zur Antwort $\frac{15x}{100-x}$ Kreuzer.

Eben so bey der andern welche x Eyer für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, findet man wie viel sie aus ihren 100 − x Eyer gelöset, $x : \frac{20}{3} = 100 - x$ zur Antwort $\frac{2000-20x}{3x}$. Da nun die beyden Bäurinnen gleich viel gelöset haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$$

mit 3x multiplicirt, kommt $2000 - 20x = \frac{45xx}{100-x}$

mit 100 − x multiplicirt,

$45xx = 200000 - 4000x + 20xx$

20xx subtrahirt, $25xx = 200000 - 4000x$

durch 25 dividirt $xx = -160x + 8000$: daher nach der Regel

$x = -80 + \sqrt{}(6400 + 8000) = -80 + 120 = 40.$

Antwort: die erste Bäurinn hat also gehabt 40 Eyer, die andere 60 Eyer und hat eine jede 10 Kreuzer gelöset.

93.

X. Frage: Zwey verkaufen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthl. Spricht der erste zum andern: aus deinem Zeuge wollt ich gelöset haben 24 Rthl.

ant-

antwortet der andere, so hätte ich aus deinem gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel hat jeder Ellen gehabt?

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der andere $x+3$ Ellen. Da nun der erste aus $x+3$ El. 24 Rthl. gelöset hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben vor $\frac{24x}{x+3}$ Rthl. und da der andere x Ellen verkauft hätte für $12\frac{1}{2}$ Rthl. so hätte er seine $x+3$ Ellen verkauft vor $\frac{25x+75}{2x}$; und so haben beyde zusammen gelöset

$$\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x}=35 \text{ Rthl.}$$

Also $\frac{48xx}{x+3}+25x+75=70x$,

oder $\frac{48xx}{x+3}=45x-75$, mit $x+3$ multiplicirt wird, $48xx=45xx+60x-225$, subtrahirt $45xx$, so hat man $3xx=60x-225$, oder $xx=20x-75$.

Hieraus wird $x=10\pm\sqrt{}(100-75)=10\pm\sqrt{}25$, also $x=10\pm5$.

Antwort: Es giebt daher zwey Auflösungen. Nach der ersten hat der erste 15 Ellen, und der andere 18 Ellen: weil nun der erste 18 Ellen verkauft hat vor 24 Rthl. so hat er aus seinen 15 Ellen gelöst 20 Rthl. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthl. also beyde zusammen 35 Rthl.

Nach der andern Auflösung hat der erste gehabt 5 Ellen, folglich also der andere 8 Ellen, also der erste hätte verkauft 8 Ellen für 24 Rthl. und hat also aus seinen 5 Ellen gelöset 15 Rthl. Der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 8 Ellen gelöset 20 Rthl. folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthl.

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckigten Zahlen.

94.

Wir haben oben gezeigt, wie die vieleckigten Zahlen gefunden werden sollen: was wir aber daselbst eine Seite genennt haben, wird auch eine Wurzel genennt. Wenn nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigten Zahlen folgender Gestalt gefunden:

Das 3 eck	ist	$\frac{xx+x}{2}$
" " 4 eck	" "	xx
" " 5 eck	" "	$\frac{3xx-x}{2}$
" " 6 eck	" "	$2xx-x$
" " 7 eck	" "	$\frac{5xx-3x}{2}$
" " 8 eck	" "	$3xx-2x$
" " 9 eck	" "	$\frac{7xx-5x}{2}$
" " 10 eck	" "	$4xx-3x$
" " n eck	" "	$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

95. Durch

95.

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht für eine jede gegebene Seite, oder Wurzel, eine verlangte vieleckigte Zahl so groß auch die Zahl der Ecke seyn mag zu finden, wie schon oben genugsam gezeigt worden. Wenn aber umgekehrt eine vieleckigte Zahl von einer gewissen Anzahl Seite gegeben ist, so ist es weit schwerer die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung quadratischer Gleichungen erfordert, daher diese Sache allhier besonders verdienet abgehandelt zu werden. Wir wollen hiebey der Ordnung nach von den dreyeckigten Zahlen anfangen, und zu den mehreckigten fortschreiten.

96.

Es sey demnach 91 die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $= x$ so muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn: man multiplicire mit 2, so hat man $xx+x=182$, woraus gefunden wird $xx=-x+182$, und also $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+182)}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{4}}$ folglich $x=-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=13$; daher ist die verlangte Dreyeckswurzel $= 13$, denn das Dreyeck von 13 ist 91.

97.

Es sey aber auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $= x$, so wird $\frac{xx+x}{2}=a$, oder $xx+x=2a$, oder ferner $xx=-x+2a$, woraus gefun-

funden wird $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 2a)}$, oder $x = \frac{-1 + \sqrt{(8a+1)}}{2}$.

Hieraus entspringt diese Regel. Man multiplicire die gegebene dreyeckigte Zahl mit 8, und zum Product addire 1, aus der Summe ziehe man die Quadratwurzel, von derselben subtrahire 1; den Rest dividire durch 2, so kommt die gesuchte Dreyeckswurzel heraus.

98.

Hieraus sieht man, daß alle dreyeckigte Zahlen diese Eigenschaft haben, daß wenn man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt immer eine Quadratzahl herauskommen müsse, wie aus folgendem Täfelchen zu ersehen,

III. Eck.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,	66,	ꝛc.
8 mahl + 1,	9,	25,	49,	81,	121,	169,	225,	289,	361,	441,	529,	ꝛc.

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine wirkliche dreyeckigte Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyeckswurzel aus der Zahl 210, so ist a = 210 und 8a + 1 = 1681, wovon die Quadratwurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 wirklich eine dreyeckigte Zahl ist, wovon die Wurzel $= \frac{41 - 1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{\sqrt{33} - 1}{2}$ und also irrational: Es wird aber auch wirk-

lich

lich von dieser Wurzel, nämlich $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreyeck gefunden, wie folget.

Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, so ist $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; darzu x addirt, wird $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, und folglich die dreyeckigte Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Da die viereckigten Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Denn setzt man die gegebene viereckigte Zahl $= a$ und ihre Viereckswurzel $= x$, so wird $xx = a$ und also $x = \sqrt{a}$. Also daß die Quadratwurzel und Viereckswurzel einerley sind.

101.

Wir wollen demnach zu den fünfeckigten Zahlen fortschreiten.

Es sey nun 22 eine fünfeckigte Zahl, und die Würzel derselben $= x$, so muß seyn $\frac{3xx-x}{2} = 22$, oder $3xx - x = 44$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{44}{3})}$, das ist $x = \frac{1+\sqrt{(529)}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$.

Also ist 4 die gesuchte Fünfeckswurzel aus der Zahl 22.

102.

Es sey nun vorgelegt diese Frage: wenn das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt

Setzt man diese gesuchte Wurzel = x, so kommt man auf diese Gleichung $\frac{3xx-x}{2} = a$, oder $3xx - x = 2a$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3})}$, das ist $x = \frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}$. Wenn daher a ein wirkliches Fünfeck ist, so muß 24a+1 immer eine Quadratzahl seyn.

Es sey z. E. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{7921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckigte Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel = x, so wird $2xx - x = a$, oder $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, daher gefunden wird $x = \frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a)} = \frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}$. Wenn also a ein wirkliches Sechseck ist, so muß 8a+1 ein Quadrat werden, woraus man sieht, daß alle sechseckigte Zahlen unter den dreyeckigten begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sey z. E. die sechseckigte Zahl 1225, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+90}{4} = 25$.

104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll:

Setzt

Setzt man diese Wurzel = x, so hat man $\frac{5xx-3x}{2}$ = a, oder 5 xx − 3 x = 2a, also xx = $\frac{3}{5}$ x + $\frac{2}{5}$ a, woraus gefunden wird x = $\frac{3}{10}$ + $\sqrt{}$ ($\frac{9}{100}$ + $\frac{2}{5}$ a) = $\frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}$. Alle siebeneckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß, wenn man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summe immer Quadratzahlen werden.

Es sey z. E. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon x = $\frac{3+\sqrt{(82369)}}{10}$ = $\frac{3+287}{10}$ = 29.

105.

Es sey nun a eine gegebene achteckigte Zahl, wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat daher 3 xx − 2x = a, oder xx = $\frac{2}{3}$ x + $\frac{1}{3}$ a, woraus gefunden wird x = $\frac{1}{3}$ + $\sqrt{}$ ($\frac{1}{9}$ + $\frac{a}{3}$) = $\frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}$. Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wenn man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt die Summe immer eine Quadratzahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn x = $\frac{1+\sqrt{11449}}{3}$ = $\frac{1+107}{3}$ = 36.

106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man diese Gleichung.

$$\frac{(n-2)\,xx-(n-4)\,x}{2}=a,\ \text{oder}\ (n-2)\,xx-(n-4)\,x=2a,$$

also:

$$xx=\frac{(n-4)\,x}{n-2}+\frac{2a}{n-2},\ \text{woraus gefunden wird}$$

$$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{2a}{n-2}\right)},\ \text{oder}$$

$$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{8.(n-2)a}{4.(n-2)^2}\right)}\ \text{und folglich}$$

$$x=\frac{n-4+\sqrt{(8.(n-2)\,a+(n-4)^2)}}{2.(n-2)}.$$

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a=3009$ und $n=24$, folglich $n-2=22$ und $n-4=20$, so bekommen wir die Wurzel

$$x=\frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44}=\frac{20+728}{44}=17.$$



Capi-

Capitel 8.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien.

107.

Ein Binomium wird in der Algebra genennt eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3 + \sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8} + \sqrt{3}$, und es ist gleich viel ob diese beyden Theile mit dem Zeichen + oder − verbunden sind. Daher wird $3 - \sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt als $3 + \sqrt{5}$.

108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merkwürdig, weil man bey Auflösung der quadratischen Gleichungen jedesmahl auf solche Formeln kommt, so oft die Auflösung nicht geschehen kann.

Also wenn z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 6x - 4$, so wird denn $x = 3 + \sqrt{5}$. Um dieser Ursache willen kommen nun solche Formeln in den Algebraischen Rechnungen sehr häufig vor, und wir haben auch schon oben gezeiget, wie damit die gewöhnliche Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Nun aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadratwurzeln ausgezogen werden können, wofern nämlich eine solche Ausziehung statt findet, indem wiedrigenfalls nur noch ein Wurzelzeichen vorgesetzt wird, nämlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$.

109.

Man hat demnach zuförderst zu bemerken, daß die Quadrate von solchen Binomien wiederum dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Denn sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$. Wenn also von dieser Formel $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ hinwiederum die Quadratwurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a + \sqrt{b}$, welche ohnstreitig deutlicher zu begreifen ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte. Eben so, wenn man von dieser Formel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $(a+b) + 2\sqrt{ab}$, daher auch umgekehrt von dieser Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadratwurzel seyn wird $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, welche wiederum verständlicher ist, als wenn man vor jene noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte.

110.

Es kommt daher darauf an, wie ein Kennzeichen zu erfinden sey, woraus in einem jeglichen Fall beurtheilet werden kann, ob eine solche Quadratwurzel statt finde oder nicht. Wir wollen zu diesem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen, und sehen, ob man aus diesem Binomio $5 + 2\sqrt{6}$ solcher Gestalt die Quadratwurzel finden könne:

Man setze also diese Wurzel sey $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x+y) + 2\sqrt{xy}$ ist, also muß dieses Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich seyn; folglich der rationale Theil $x + y$ muß gleich seyn 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich seyn $2\sqrt{6}$; daher bekommt man $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, und die Quadrate genommen $xy = 6$. Da nun $x + y = 5$, so wird hieraus $y = 5 - x$ welcher Werth in der Gleichung $xy = 6$ gesetzt, giebt $5x - xx = 6$ oder $xx = 5x - 6$, daher $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{24}{4})} = \frac{5}{2}$

$+ \frac{1}{2} =$

$+\frac{1}{2}=3$; also $x=3$ und $y=2$, folglich wird aus $5+2\sqrt{6}$ die Quadratwurzel seyn $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

111.

Da wir hier diese beyde Gleichungen erhalten haben, I.) $x+y=5$, und II.) $xy=6$, so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus x und y zu finden, welcher darinn besteht:

Da $x+y=5$, so nehme man die Quadraten $xx+2xy+yy=25$: Nun bemerke man, daß $xx-2xy+yy$ das Quadrat von $x-y$ ist; man subtrahire daher von jener Gleichung nämlich von $xx+2xy+yy=25$, diese $xy=6$ vier mal genommen, oder $4xy=24$, so erhält man $xx-2xy+yy=1$, und hieraus die Quadratwurzel $x-y=1$, so wird, weil $x+y=5$ ist, gefunden $x=3$ und $y=2$. Daher die gesuchte Quadratwurzel von $5+2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

112.

Laßt uns dieses allgemeine Binomium $a+\sqrt{b}$ betrachten, und die Quadratwurzel davon $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$, also $x+y=a$ und $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$ oder $4xy=b$: von jener ist das Quadrat $xx+2xy+yy=aa$, wovon diese $4xy=b$ subtrahirt, giebt $xx-2xy+yy=aa-b$, und wovon die Quadratwurzel ist $x-y=\sqrt{(aa-b)}$. Da nun $x+y=a$, so finden wir $x=\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}$ und $y=\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$ daher die verlangte Quadratwurzel aus $a+\sqrt{b}$ seyn wird: $\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}$.

113.

Diese Formel ist allerdings verwirrter, als wenn man für das gegebene Binomium $a + \sqrt{b}$ schlecht weg das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ gesetzt hätte, nämlich $\sqrt{(a + \sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wenn die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $aa - b$ ein Quadrat wird, weil alsdenn das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel bequem ausziehen könne, wenn $aa - b = cc$, denn alsdenn wird die gesuchte Quadratwurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wenn aber $aa - b$ keine Quadratzahl ist, so läßt sich die Quadratwurzel nicht füglicher anzeigen, als durch Vorsetzung des $\sqrt{}$ Zeichens.

114.

Daher erhalten wir diese Regel um aus einem Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel auf eine bequemere Art auszudrücken. Hierzu wird nämlich erfodert, daß $aa - b$ eine Quadratzahl sey: ist nun dieselbe $= cc$, so wird die verlangte Quadratwurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wobey noch anzumerken, daß von $a - \sqrt{b}$ die Quadratwurzel seyn werde $\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Denn nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a - 2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; da nun $cc = aa - b$, so ist $aa - cc = b$: daher dieses Quadrat $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \frac{2\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{b}$.

115. Wenn

115.

Wenn also aus einem solchen Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils aa das Quadrat des irrationalen Theils b: aus dem Rest ziehe man die Quadratwurzel, welche $= c$ sey, so ist die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

116.

Man suche die Quadratwurzel aus $2 + \sqrt{3}$, so ist $a = 2$ und $b = 3$; daher $aa - b = cc = 1$, und also $c = 1$: daher die verlangte Quadratwurzel ist $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es sey ferner dieses Binomium gegeben $11 + 6\sqrt{2}$, woraus die Quadratwurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a = 11$ und $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; daher $b = 36 \cdot 2 = 72$ und $aa - b = 49$, folglich $c = 7$. Daher die Quadratwurzel aus $11 + 6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Man suche die Quadratwurzel aus $11 - 2\sqrt{30}$: Hier ist $a = 11$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, daher $b = 4 \cdot 30 = 120$ und $aa - b = 1$ und $c = 1$: folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

117.

Diese Regel findet auch statt, wenn so gar imaginäre, oder unmögliche Zahlen, vorkommen.

Wenn also gegeben ist dieses Binomium $1 + 4\sqrt{-3}$, so ist $a = 1$ und $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$; daher $b = -48$ und $aa - b = 49$. Daher $c = 7$ folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b = \frac{1}{4} \cdot -3 = -\frac{3}{4}$ daher $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ und $c = 1$: folglich die gesuchte

suchte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Noch ist merkwürdig dieses Exempel, wo aus $2\sqrt{-1}$ die Quadratwurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a = 0$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{-1}$, daher $b = -4$ und $aa - b = 4$, also $c = 2$, woraus die gesuchte Quadratwurzel ist $\sqrt{1} + \sqrt{-1} = 1 + \sqrt{-1}$, wovon das Quadrat ist $1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1}$.

118.

Sollte auch eine solche Gleichung aufzulösen vorfallen wie, $xx = a \pm \sqrt{b}$ und es wäre $aa - b = cc$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es sey z. E. $xx = 17 + 12\sqrt{2}$, so wird $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

119.

Dieses findet insonderheit statt bey Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grad, als $x^4 = 2axx + d$. Denn setzt man hier $xx = y$ so wird $x^4 = yy$, daher unsere Gleichung $yy = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm \sqrt{(aa + d)}$: daher für die erste Gleichung seyn wird $xx = a \pm \sqrt{(aa + d)}$, woraus folglich noch die Quadratwurzel gezogen werden muß. Da nun hier $\sqrt{b} = \sqrt{(aa + d)}$ also $b = aa + d$, so wird $aa - b = -d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat nämlich cc oder $d = -cc$, so kann die Wurzel angezeigt werden; es sey demnach $d = -cc$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grad vorgegeben $x^4 = 2axx - cc$,

so

so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

120.

Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern;

I. Erstlich suche man zwey Zahlen, deren Product sey 105, und wenn man ihre Quadraten zusammen addirt, so sey die Summe = 274?

Man setze diese Zahlen seyn x und y, so hat man sogleich diese zwey Gleichungen I.) $xy = 105$ und II.) $xx + yy = 274$.

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$ welcher Werth in der andern vor y gesetzt, giebt $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Mit xx multiplicirt wird: $x^4 + 105^2 = 274\,xx$, oder $x^4 = 274\,xx - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; daher $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4:$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Fall wird $y = 7$, im letztern aber $y = 15$. Daher die beyden gesuchten Zahlen sind 15 und 7.

121.

Es ist hier aber gut zu bemerken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Denn da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein Quadrat ist, wir aber wissen was so wohl $xx + yy$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genom-

men, so wohl zu dem ersten addiren, als auch davon subtrahiren, wie hier zu sehen:
$xx + yy = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt
$xx + 2xy + yy = 484$ und $x + y = 22$
darnach $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = 64$ und $x - y = 8$.
Also $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellet daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf diese Art kann auch diese allgemeine Frage aufgelöset werden.

II. Man suche zwey Zahlen, davon das Product $= m$, und die Summe ihrer Quadraten $= n$?
Die gesuchten Zahlen seyn x und y, so hat man die beyden folgenden Gleichungen I.) $xy = m$, II.) $xx + yy = n$. Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich $2xy$ addirt wird $xx + 2xy + yy = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$.
hierauf $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{(n - 2m)}$
also $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} + \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$ und $y = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} - \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$.

122.

III. Es sey ferner diese Frage vorgelegt: man suche zwey Zahlen, deren Product $= 35$ und die Differenz ihrer Quadraten $= 24$?

Es sey x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beyde Gleichungen $xy = 35$ und $xx - yy = 24$, da nun hier die vorigen Vortheile nicht statt finden, so verfahre man nach der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, giebt $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, mit xx multiplicirt, so hat man $x^4 - 1225 = 24xx$ und $x^4 = 24xx + 1225$.

$+1225$. Weil hier das letzte Glied das Zeichen plus hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nämlich $cc = -1225$, und also c imaginär würde.

Man setze daher $xx = z$, so hat man $zz = 24z + 1225$ woraus gefunden wird $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ oder $z = 12 \pm 37$ daher $xx = 12 \pm 37$, das ist entweder $xx = 49$ oder $xx = -25$.

Nach dem ersten Werth wird $x = 7$ und $y = 5$

Nach dem andern aber wird $x = \sqrt{-25}$ und $y = \frac{35}{\sqrt{-25}}$,

oder $y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, oder $y = \sqrt{-49}$.

123.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch diese Frage beyfügen:

IV. Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Product, und die Differenz ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die größere Zahl sey x, die kleinere y, so müssen diese drey Formeln einander gleich seyn: I.) Summe $x + y$, II.) Product xy, III.) Differenz der Quadraten $xx - yy$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x + y = xy$ und daraus suche man x. Man wird also haben $y = xy - x$ oder $y = x(y - 1)$ und daraus wird $x = \frac{y}{y-1}$; daher wird $x + y = \frac{yy}{y-1}$ und $xy = \frac{yy}{y-1}$ und also ist die Summe dem Product schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadraten gleich seyn: es wird aber $xx - yy$ $= \frac{yy}{yy-2y+1} - yy = \frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$ welches dem obigen

Werth

Werth $\frac{yy}{y-1}$ gleich seyn muß; daher bekommt man $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^4}$; durch yy dividirt wird $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt wird $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$ nochmals mit $y-1$ multiplicirt giebt $y-1=-yy+2y$: folglich $yy=y+1$. Hieraus findet man $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+1)}$ $=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ oder $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: und daher erhalten wir $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicirt man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bekommt man $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Antwort: Also die größere der gesuchten Zahlen $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ihre Summe ist also $x+y=2+\sqrt{5}$, ferner das Product $xy=2+\sqrt{5}$, und da $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und yy $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ so wird die Differenz der Quadraten $xx-yy$ $=2+\sqrt{5}$.

124.

Weil diese Auflösung ziemlich mühsam war, so kann dieselbe leichter gefunden werden; man setze erstlich die Summe $x+y$, der Differenz der Quadraten $xx-yy$ gleich, so hat man $x+y=xx-yy$. Hier kann man durch $x+y$ dividiren weil $xx-yy=(x+y)(x-y)$, und da erhält man $1=x-y$ woraus $x=y+1$; daher $x+y=2y+1$, und $xx-yy$ $=2y+1$;

$= 2y + 1$; und diesem muß noch gleich seyn das Product $xy = yy + y$. Man hat also $yy + y = 2y + 1$, oder $yy = y + 1$, woraus wie oben gefunden wird $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Frage. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und die Summe ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die gesuchten Zahlen seyn x und y, so müssen diese drey Formeln einander gleich seyn. I.) $x + y$, II.) xy, und III.) $xx + yy$.

Setzt man die erste der zweyten gleich $x + y = xy$, so findet man daraus $x = \frac{y}{y - 1}$ und $x + y = \frac{yy}{y - 1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $xx + yy = \frac{yy}{yy - 2y + 1} + yy$, welches dem $\frac{yy}{y - 1}$ gleich zu setzen: Man multiplicire mit $yy - 2y + 1$ so bekommt man $y^4 - 2y^3 + 2yy = y^3 - yy$ oder $y^4 = 3y^3 - 3yy$, und durch yy dividirt $yy = 3y - 3$; daher $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - 3)}$, also $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ daher $y - 1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, folglich $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 - \sqrt{-3}$, so wird $x = \frac{6 - 2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$.

Antwort: also sind die beyden gesuchten Zahlen $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$ und $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, ihre Summe ist $x + y$

$= 3$,

$=3$, das Product $xy=3$, und da endlich $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$

und $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $xx+yy=3$.

126.

Diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welches noch in andern Fällen statt findet. Derselbe bestehet darinn, daß man die gesuchte Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p+q$ und die andere $p-q$, so wird die Summe derselben seyn $2p$, ihr Product $pp-qq$ und die Summe ihrer Quadraten $2pp+2qq$ welche drey Stück einander gleich seyn müssen. Man setze das erste gleich dem zweyten so wird $2p=pp-qq$ und daraus $qq=pp-2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird dasselbe $4pp-4p$. Welches dem ersten gleich gesetzt giebt $2p=4pp-4p$. Man addire $4p$ so wird $6p=4pp$, durch p dividirt $6=4p$ und also $p=\frac{3}{2}$.

Hieraus $qq=-\frac{3}{4}$ und $q=\frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p+q=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p-q=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.



Capitel

Capitel 9.

Von der Natur der quadratischen Gleichungen.

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Gnüge ersehen, daß die quadratischen Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen daher genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulasse, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl so wohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden lassen, daher wird es gut seyn den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären, woher es komme daß eine quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgelöset werden, oder daß vor x zweyerley Werthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x so wohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern o zu stehen kommt. Daher die obige Gleichung seyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wobey es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche wenn sie vor x gesetzt wird, die Formel $xx - 12x + 35$ wirklich in nichts verwandelt werde; und hernach muß auch die Ursach gezeigt werden, warum solches auf zweyerley Art geschehen könne.

130.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deutlich zeige, daß eine solche Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden könne, wie denn diese Formel wirklich aus diesen zwey Factoren besteht $(x-5).(x-7)$. Wenn daher jene Formel soll o werden, so muß auch dieses Product $(x-5).(x-7) = 0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit o, wenn nur einer von seinen Factoren o wird. Denn so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wenn dasselbe noch mit o multiplicirt wird, so kommt immer o heraus, welcher Grundsatz für die höhern Gleichungen wohl zu bemerken ist.

131.

Hieraus begreift man nun ganz deutlich, daß dieses Product $(x-5).(x-7)$ auf eine doppelte Art o werden könne: einmal nämlich wenn der erste Factor $x-5=0$ wird, und hernach auch, wenn der andere Factor $x-7=0$ wird. Das erstere geschiehet wenn $x=5$, das andere aber wenn $x=7$. Hieraus versteht man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung $xx-12x+35=0$, zweyerley Auflösungen zuläßt, oder

für

für x zwey Werthe gefunden werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten.

Der Grund besteht nämlich darinn, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus Factoren vorstellen läßt.

132.

Eben dieser Umstand findet bey allen quadratischen Gleichungen statt. Denn wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Form $xx - ax + b = 0$; und diese Formel kann ebenfalls als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen $(x - p)(x - q)$ ohne uns darum zu bekümmern, was p und q vor Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product gleich 0 werde, so ist offenbar, daß solches auf zweyerley Art geschehen könne: erstlich wenn $x = p$, und zweytens wenn $x = q$, welches die beyden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

133.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwey Factoren beschaffen seyn müssen, daß derselben Product just unsere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe: man multiplicire demnach dieselben wirklich, so erhält man $xx - (p + q)x + pq$ welches, da es einerley seyn soll mit $xx - ax + b$, so ist klar daß seyn muß $p + q = a$ und $pq = b$, woraus wir diese herrliche Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx - ax + b = 0$ die beyden Werthe für x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a und ihr Product der Zahl b. Daher so bald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht der andere zu finden.

134.

Dieses war der Fall, wenn beyde Werthe für x Positiv sind, da denn in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen −, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen daher auch die Fälle erwegen, worinnen einer von den beyden Werthen für x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geschiehet wenn die beyden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x-p)(x+q)$; woher diese zwey Werthe für x entspringen, erstlich $x=p$ und zweytens $x=-q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdenn $xx+(q-p)x-pq=0$, wo das zweyte Glied das Zeichen + hat wenn nämlich q größer ist als p: wäre aber q kleiner als p so hätte es das Zeichen −, das dritte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beyden Factoren $(x+p)(x+q)$ so wären beyde Werthe für x negativ, nämlich $x=-p$ und $x=-q$ und die Gleichung selbst würde seyn $xx+(p+q)x+pq=0$, wo sowohl das zweyte als das dritte Glied das Zeichen + haben.

135.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeglichen quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx \ldots ax \ldots b=0$ wenn nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beyde Werthe negativ: ist das zweyte Glied −, das dritte aber + so sind beye Werthe positiv: ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das zweyte Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

136.

Anjetzo ist es ganz leicht solche quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebene

bene Werthe in sich enthalten: man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber −3. Man mache daraus diese einfache Gleichungen $x=7$ und $x=-3$; hieraus ferner diese $x-7=0$ und $x+3=0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden: also daß die Gleichung seyn wird $xx-4x-21=0$, woraus auch nach der obigen Regel eben diese beyde Werthe für x gefunden werden. Denn da $xx=4x+21$, so wird $x=2\pm\sqrt{25}$, also $x=2\pm5$, also entweder $x=7$ oder $x=-3$.

137.

Es kann auch geschehen, daß beyde Werthe für x einander gleich werden; man suche nämlich eine Gleichung wo beyde Werthe für x sind $x=5$; die beyden Factoren werden also seyn $(x-5)(x-5)$ und die Gleichung ist also beschaffen $xx-10x+25=0$, welche scheinet nur einen Werth zu haben, weil auf eine doppelte Art wird $x=5$, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Denn da $xx=10x-25$, so wird $x=5\pm\sqrt{0}$, oder $x=5\pm0$ und daher wird $x=5$ und $x=5$.

138.

Insonderheit ist hier noch zu merken, daß bisweilen beyde Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es ganz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen welcher der Gleichung ein Genüge leistet: wie z. E. geschiehet, wenn die Zahl 10 in zwey solche Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey; denn es sey ein Theil $=x$ so wird der andere seyn $10-x$ und also ihr Product $10x-xx=30$, folglich $xx=10x-30$ und $x=5\pm\sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist und zu erkennen giebt, daß die Frage unmöglich sey.

139.

Es ist demnach sehr wichtig ein Kennzeichen auszufinden, woraus man sogleich erkennen kann, ob eine quadratische Gleichung möglich sey oder nicht. Es sey daher diese allgemeine Gleichung gegeben: $xx - ax + b = 0$, so wird $xx = ax - b$ und $x = \frac{1}{2}a \pm \surd(\frac{1}{4}aa - b)$; woraus erhellet, daß wenn die Zahl b grösser ist als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ grösser als aa, die beyden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beyden Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder unmöglich, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer diese Eigenschaft, daß ihre Summe ist $= a$ und ihr Product $= b$, wie in diesem Exempel zu ersehen $xx - 6x + 10 = 0$, wo die Summe der beyden Werthe für x seyn muß $= 6$ und das Product $= 10$. Man findet aber diese beyden Werthe: I.) $x = 3 + \surd -1$ und II.) $x = 3 - \surd -1$, deren Summe $= 6$ und ihr Product $= 10$ ist.

140.

Man kann dieses Kennzeichen auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auch auf solche Gleichungen angewandt werden kann $fxx \pm gx + h = 0$: denn hieraus hat man $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$ daher $x = \mp \frac{g}{2f} \pm \surd\left(\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}\right)$, oder $x = \frac{\mp g \pm \surd(gg - 4fh)}{2f}$, woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär oder die Gleichung unmöglich werde, wenn $4fh$ grösser ist als g, oder wenn in dieser Gleichung $fxx \pm gx + h = 0$ das

das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied grösser ist, als das Quadrat des zweyten Glieds. Denn das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied ist $4fhxx$, das Quadrat aber des mittlern Glieds ist $ggxx$: wenn nun $4fhxx$ grösser als $ggxx$, so ist auch $4fh$ grösser als gg und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beyden Werthe für x können wirklich angegeben werden, wenn dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werth gelangen kann, wie oben bemerket worden; dahingegen bey imaginären Ausdrücken als $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141.

Hierbey ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweyten Grad $xx \pm ax \pm b$ nothwendig allezeit in zwey solche Factores $(x \pm p)$ $(x \pm q)$ aufgelöst werden kann. Denn wenn man drey solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grad kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grad ansteigen. Daher es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grad nothwendig zwey Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr, noch weniger seyn können.

142.

Man hat schon gesehen, daß wenn diese beyden Factores gefunden worden, man daraus auch die beyden Werthe für x anzeigen kann; indem ein jeder Factor, wenn er gleich 0 gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß

so bald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der quadratischen Gleichung erkannt werde. Denn wenn $x = p$ ein Werth für x in einer quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben: oder die Gleichung, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143.

Um dieses zu erläutern so sey diese Gleichung gegeben: $xx + 4x - 21 = 0$, von welcher wir wissen, daß $x=3$ ein Werth für x sey, indem $3.3 + 4.3 - 21 = 0$ ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x - 3$ ein Factor dieser Gleichung sey, oder daß sich $xx+4x-21$ durch $x-3$ theilen lasse, wie aus dieser Division zu ersehen

$$\begin{array}{l} x-3)\ xx+4x-21\ (x+7 \\ \quad\quad\ \underline{xx-3x} \\ \quad\quad\quad\quad\ 7x-21 \\ \quad\quad\quad\quad\ \underline{7x-21} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 0 \end{array}$$

Also ist der andere Factor $x + 7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt $(x-3)(x+7) = 0$ woraus die beyden Werthe für x sogleich erhellen, da nämlich aus dem ersten Factor $x=3$ aus dem andern aber $x=-7$ wird.



Capitel

Capitel 10.

Von der Auflösung der reinen Cubischen Gleichungen.

144.

Eine reine cubische Gleichung wird genennt, wenn der Cubus der unbekannten Zahl einer bekannten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekannten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt:

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbahr, indem man nur nöthig hat beyderseits die Cubicwurzel auszuziehen:

Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Wenn man daher nur gelernet hat die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solcher Gestalt erhält man aber nur einen Werth für x, da nun eine jegliche quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müsse, daher wird es der Mühe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, dieselben auch ausfündig zu machen.

147.

Wir wollen z. E. diese Gleichung betrachten $x^3=8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 sey, da nun eine solche Zahl unstreitig $x=2$ ist, so muß nach dem vorigen Capitel die Formel $x^3-8=0$ sich nothwendig durch $x-2$ theilen lassen: wir wollen also diese Theilung verrichten wie folget.

$$
\begin{array}{r|l}
x-2) & x^3-8\,(xx+2x+4 \\
& \underline{x^3-2xx} \\
& 2xx-8 \\
& \underline{2xx-4x} \\
& 4x-8 \\
& \underline{4x-8} \\
& 0
\end{array}
$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3-8=0$ durch diese Factores vorstellen $(x-2)(xx+2x+4)=0$.

148.

Da nun die Frage ist was für eine Zahl für x angenommen werden müsse, daß $x^3=8$ werde, oder daß $x^3-8=0$ werde, so ist klar, daß dieses geschehe, wenn das gefundene Product gleich o werde: dasselbe wird aber o, nicht nur wenn der erste Factor $x-2=0$ wird,

wird, woraus entspringt $x=2$, sondern auch, wenn der andere Factor $xx+2x+4=0$ werde. Man setze also $xx+2x+4=0$, so hat man $xx=-2x-4$ und daher wird $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

149.

Außer dem Fall also $x=2$ in welchem die Gleichung $x^3=8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey andere Werthe für x, deren Cubi ebenfalls 8 sind, und welche also beschaffen sind:

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$ und II.) $x=-1-\sqrt{-3}$ welches außer Zweifel gesetzt wird, wenn man die Cubi davon nimmt, wie folget:

$$\begin{array}{rl}
-1+\sqrt{-3} & \\
-1+\sqrt{-3} & \\
\hline
1-\sqrt{-3} & \\
-\sqrt{-3}-3 & \\
\hline
-2-2\sqrt{-3} & \text{Quadrat} \\
-1+\sqrt{-3} & \\
\hline
2+2\sqrt{-3} & \\
-2\sqrt{-3}+6 & \\
\hline
8 & \text{Cubus}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-1-\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
1+\sqrt{-3} \\
+\sqrt{-3}-3 \\
\hline
-2+2\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
2-2\sqrt{-3} \\
+2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
8
\end{array}$$

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger bemerket zu werden.

150.

Dieses findet auch insgemein statt für eine jegliche dergleichen cubische Gleichung $x^3=a$, wo außer dem Werth $x=\sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfalls statt finden. Man setze um der Kürze willen $\sqrt[3]{a}=c$ also daß $a=c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme,

$x^3-c^3=0$, welche letztere sich durch $x-c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$
\begin{array}{l}
x-c)\ x^3-c^3\ (xx+cx+cc \\
\quad\ \underline{x^3-cxx} \\
\qquad\quad cxx-c^3 \\
\qquad\quad \underline{cxx-ccx} \\
\qquad\qquad ccx-c^3 \\
\qquad\qquad \underline{ccx-c^3} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

daher wird unsere Gleichung durch dieses Product vorgestellt $(x-c)(xx+cx+cc)=0$, welches wirklich gleich 0 wird, nicht nur wenn $x-c=0$ oder $x=c$, sondern auch wenn $xx+cx+cc=0$, daraus aber wird $xx=-cx-cc$ und daher $x=-\frac{c}{2}$ $\pm\surd\left(\frac{cc}{4}-cc\right)$ oder $x=\frac{-c\pm\surd-3cc}{2}$ das ist $x=\frac{-c\pm c\surd-3}{2}=\frac{-1\pm\surd-3}{2}.c$, in welcher Formel noch zwey Werthe für x enthalten sind.

151.

Da nun c anstatt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir daher diesen Schluß, daß von einer jeden cubischen Gleichung von dieser Form $x^3=a$ dreyerley Werthe für x gefunden werden können, welche also ausgedrückt werden:

I.) $x=\sqrt[3]{a}$, II.) $x=\frac{-1+\surd-3}{2}.\sqrt[3]{a}$, III.) $x=\frac{-1-\surd-3}{2}.\sqrt[3]{a}$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubicwurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich, die

die beyden andern aber unmöglich sind, welches deswegen hier wohl zu bemerken, weil wir schon oben gesehen, daß eine jede quadratische zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grad vier verschiedene Werthe, vom fünften Grad fünf dergleichen und so weiter habe.

Bey gemeinen Rechnungen, wird zwar nur der erste von diesen 3 Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

152.

I. Frage: Suche eine Zahl, daß derselben Quadrat mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt 432 hervorbringe?

Diese Zahl sey x, so muß xx mit $\frac{1}{4}$ x multiplicirt der Zahl 432 gleich werden: daher wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$
mit 4 multiplicirt wird $x^3 = 1728$
und die Cubicwurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 12 dann ihr Quadrat ist 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153.

II. Frage: Suche eine Zahl, deren vierte Potestät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde?

Die Zahl sey x, so ist ihre vierte Potestät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, giebt $2x^3$, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt soll 100 machen; also hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $2x^3 = \frac{343}{4}$, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$ und die Cubicwurzel ausgezogen erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Frage: Einige Hauptleute liegen zu Felde, jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter, und 20 mal

so

so viel Fußgänger als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monathssold gleich so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als der Hauptleute sind, und beträgt der monathliche Sold in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen?

Es seyn x Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich gehabt 3 x Reuter und 20 x Fußgänger. Also die Zahl aller Reuter war 3 xx und der Fußgänger 20 xx. Da nun ein Reuter x Fl. bekommt, ein Fußknecht aber $\frac{1}{2}$ x Fl. so ist der monathliche Sold der Reuter $3x^3$ Fl. der Fußknechte aber $10x^3$ Fl. insgesammt also bekommen sie $13x^3$ Fl. so der Zahl 13000 gleich seyn muß: da also $13x^3 = 13000$ so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$.
So viel sind der Hauptleute gewesen.

155.

IV. Frage: Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100 mal so viel ein als ihrer sind, schicken damit einen Factoren nach Venedig, der gewinnt je mit 100 Fl. zweymal so viel Fl. als ihrer sind, kommt wieder zurück, und der Gewinnst beträgt 2662 Fl. Ist die Frage wie viel der Kaufleute sind?

Es seyn x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt 100 x Fl. und das ganze Capital war 100 xx Fl. Da nun mit 100 Fl. 2 x Fl. gewonnen worden, so war der Gewinnst $2x^3$ so der Zahl 2662 gleich seyn soll: also $2x^3 = 2662$, daher $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11$, so viel sind es Kaufleute gewesen.

156.

V. Frage: Eine Bäuerinn vertauscht Käse gegen Hühner, giebt je 2 Käse für 3 Hühner: die Hühner legen Eyer, jede $\frac{1}{2}$ so viel als der Hühner sind, mit denselben

geht

geht sie auf den Markt, giebt je 9 Eyer für so viel Pfennig als ein Huhn hat Eyer gelegt, löset 72 Pfennig: wie viel hat die Bäurinn Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{1}{2}$ x Hühner vertauscht worden: da nun ein Huhn $\frac{1}{2}$ x Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{1}{4}$ xx. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}$ x Pf. also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}x^3$, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}x^3 = 72$, folglich $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$ oder $x = 8 \cdot 8 \cdot 27$, folglich $x = 12$, und so viel Käse hat die Bäuerinn gehabt, welche gegen 18 Hühner vertauscht worden.

Capitel II.

Von der Auflösung der vollständigen Cubischen Gleichungen.

157.

Eine vollständige cubische Gleichung wird genennt, wenn darinn außer dem Cubo der unbekannten Zahl, noch diese unbekannte Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, daher die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$ wenn nämlich alle Glieder auf eine Seite sind gebracht worden. Wie nun aus einer solchen Gleichung, die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden: denn man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads ist gezeiget worden.

158. Wir

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten: $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, und da eine quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:
$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, als welche mit einander multiplicirt die obige Gleichung hervorbringen. Denn $(x-1).(x-2)$ giebt $xx - 3x + 2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt giebt $x^3 - 6xx + 11x - 6$, welches die obige Form ist, so $= 0$ seyn soll. Dieses geschiehet demnach, wenn dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ nichts wird, welches eintrifft, wenn nur einer von den drey Factoren $= 0$ wird, und also in drey Fällen erstlich wenn $x - 1 = 0$, oder $x = 1$, zweytens wenn $x - 2 = 0$, oder $x = 2$, und drittens wenn $x - 3 = 0$ oder $x = 3$.
Man sieht auch so gleich, daß wenn für x eine jegliche andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Daher unsere Gleichung keine andern Wurzeln hat als diese 3.

159.

Könnte man in einem jeglichen andern Fall die drey Factores einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man so gleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche seyn sollen $x-p$, $x-q$, $x-r$: man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt giebt $xx - (p+q)x + pq$, so giebt dieses Product noch mit $x - r$ multiplicirt folgende Formel $x^3 - (p+q+r)xx + (pq+pr+qr)x - pqr$. Soll nun diese Formel gleich

gleich 0 seyn, so geschieht dieses in drey Fällen: erstlich wenn $x-p=0$ oder $x=p$, zweytens wenn $x-q=0$ oder $x=q$, und drittens, wenn $x-r=0$ oder $x=r$.

160.

Es sey nun diese Gleichung folgender Gestalt ausgedrückt $x^3-axx+bx-c=0$, und wenn die Wurzeln derselben sind I.) $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, so muß seyn erstlich $a=p+q+r$, und hernach zweytens $b=pq+pr+qr$ und drittens $c=pqr$, woraus wir sehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln mit einander multiplicirt.

Diese letzte Eigenschaft verschafft uns so gleich diesen wichtigen Vortheil, daß eine cubische Gleichung gewiß keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt: denn da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen lassen. Man weis daher so gleich, wenn man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anstellen soll.

Dieses zu erläutern wollen wir diese Gleichung betrachten $x^3=x+6$, oder $x^3-x-6=0$. Da nun dieselbe keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, dadurch sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit diesen Zahlen die Probe anzustellen 1, 2, 3, 6, welche Proben also zu stehen kommen:

I.) wenn $x=1$, so kommt $1-1-6=-6$.
II.) wenn $x=2$, so kommt $8-2-6=0$.
III.) wenn $x=3$, so kommt $27-3-6=18$.
IV.) wenn $x=6$, so kommt $216-6-6=204$.

Hieraus

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Denn da $x = 2$ eine Wurzel ist: so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung, man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschiehet

$$\begin{array}{l} x-2)\ x^3 - x - 6\ (xx + 2x + 3 \\ \qquad\ \ \underline{x^3 - 2xx} \\ \qquad\qquad 2xx - x - 6 \\ \qquad\qquad \underline{2xx - 4x} \\ \qquad\qquad\qquad 3x - 6 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{3x - 6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product vorgestellet wird $(x-2)(xx+2x+3)$ so wird dieselbe 0, nicht nur wenn $x - 2 = 0$, sondern auch wenn $xx + 2x + 3 = 0$. Hieraus aber bekommen wir $xx = -2x - 3$ und daher $x = -1 \pm \sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die wie man sieht unmöglich oder imaginär sind.

161.

Dieses findet aber nur statt, wenn das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wenn aber darinn Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyet ist, da denn die vorige Probe kann angestellet werden.

Denn es sey diese Gleichung gegeben $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$; weil hier nun Viertel vorkommen,

so

so setze man $x = \frac{y}{2}$, da bekommt man $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8}$ $- \frac{3}{4} = 0$, welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, wovon die Wurzeln sind wie wir oben gesehen $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, daher ist für unsere Gleichung I.) $x = \frac{1}{2}$, II.) $x = 1$, III.) $x = \frac{3}{2}$.

162.

Wenn nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, als wie in dieser Gleichung $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, woraus durch 6 dividirt diese entspringt $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$ welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden könnte, indem man setzt $x = \frac{y}{6}$; denn da erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216}$ $+ \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, und diese mit 216 multiplicirt wird $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Hier würde es mühsam seyn die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen: weil aber in unserer erstern Gleichung, das letzte Glied 1 ist, so setze man $x = \frac{1}{z}$ so wird $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z}$ $- 1 = 0$, welche mit z^3 multiplicirt giebt $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$, deren Wurzeln sind $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; daher wir für unsere Gleichung erhalten $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

163.

Aus dem obigen erkennt man, daß wenn alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen plus und minus mit einander abwechseln müssen, also daß die Gleichung eine solche Gestalt bekommt: $x^3 - axx + bx - c = 0$, wo drey Abwechselungen vorkommen, nämlich eben so viel als positive Wurzeln vor-

vorhanden. Wären aber alle drey Wurzeln negativ gewesen, und man hätte diese drey Factores mit einander multiplicirt $x+p$, $x+q$, $x+r$, so würden alle Glieder das Zeichen plus, und die Gleichung diese Form bekommen haben $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe, welche Anmerkung allhier von großer Wichtigkeit ist, damit man wisse, ob man die Theiler des letzten Glieds, damit man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.

164.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir diese Gleichung betrachten:

$x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schließen, daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler seyn müssen des letzten Glieds 56 und also unter diesen Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$. begriffen sind.

Setzt man nun $x = 2$, so wird $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, woraus wir sehen, daß $x=2$ eine positive Wurzel, und also $x - 2$ ein Theiler unserer Gleichung sey, woraus die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wenn man nur die Gleichung durch $x - 2$ theilet wie folget:

$x - 2)$

$$
\begin{array}{l}
x-2)\,x^3+xx-34x+56\,(xx+3x-28 \\
\quad x^3-2xx \\
\hline
\qquad 3xx-34x+56 \\
\qquad 3xx-6x \\
\hline
\qquad\quad -28x+56 \\
\qquad\quad -28x+56 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Man setze also diesen Quotienten $xx+3x-28=0$, so wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche seyn werden $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, daher die beyden übrigen Wurzeln sind $x=4$ und $x=-7$ wozu die obige $x=2$ zu nehmen.

Woraus erhellet, daß wirklich zwey positive und nur eine negative Wurzel vorhanden: dieses wollen wir noch durch folgende Exempel erläutern.

165.

I. Frage: Es sind zwey Zahlen, ihre Differenz ist 12, wenn man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, so kommen 14560, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere sey x, so ist die größere $x+12$, ihr Product ist $xx+12x$ so mit ihrer Summe $2x+12$ multiplicirt giebt $2x^3+36xx+144x=14560$ durch 2 dividirt wird $x^3+18xx+72x=7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist, als daß die Probe mit allen seinen Theilern könnte angestellet werden, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x=2y$, da denn kommt:

$8y^3+72yy+144y=7280$, welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3+9yy+18y=910$, und jetzo darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 probiren welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13 ꝛc. nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbar zu klein, nimmt man aber $y=7$ so

bekommt man $343 + 441 + 126$ just $= 910$; also ist eine Wurzel $y = 7$, folglich $x = 14$, will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wissen so dividire man $y^3 + 9yy + 18y - 910$ durch $y - 7$ wie folget:

$$
\begin{array}{l}
y - 7)\ y^3 + 9yy + 18y - 910\ (yy + 16y + 130 \\
\underline{y^3 - 7yy} \\
\quad 16yy + 18y - 910 \\
\quad \underline{16yy - 112y} \\
\qquad 130y - 910 \\
\qquad \underline{130y - 910} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Setzt man nun diesen Quotient $yy + 16y + 130 = 0$, so bekommt man $yy = -16y - 130$, und daher $y = -8 \pm \sqrt{-66}$, also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort: die beyden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt giebt 14560.

166.

II. Frage: Suche zwey Zahlen, deren Differenz 18, wenn man die Differenz ihrer Cuborum mit der Summe der Zahlen multiplicirt, daß 275184 heraus komme, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x + 18$ der Cubus der kleinern aber x^3, und der Cubus der größern $= x^3 + 54xx + 972x + 5832$, also die Differenz derselben $54xx + 972x + 5832 = 54(xx + 18x + 108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x + 18 = 2(x + 9)$ multiplicirt werden soll: das Product ist aber $108(x^3 + 27xx + 270x + 972) = 275184$: man dividire durch 108, so kommt $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$ oder $x^3 + 27xx + 270x = 1576$. Die Theiler der Zahl

1576 sind 1, 2, 4, 8 ꝛc. wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet, wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 4$ theilen wie folget:

$$\begin{array}{l} x-4)\ x^3 + 27xx + 270x - 1576\ (xx + 31x + 394 \\ \quad \underline{x^3 - 4xx} \\ \qquad 31xx + 270x \\ \qquad \underline{31xx - 124x} \\ \qquad\qquad 394x - 1576 \\ \qquad\qquad \underline{394x - 1576} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Aus dem Quotienten erhält man daher $xx = -31x - 394$, und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$ welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antwort: also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167.

III. Frage: Suche zwey Zahlen, deren Differenz 720; so ich die Quadratwurzel der größern Zahl multiplicire mit der kleinern Zahl so kommt 20736. Welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere $= x$, so ist die größere $x + 720$ und soll seyn $x\sqrt{(x + 720)} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81$. Nun nehme man beyderseits die Quadrate, so wird $xx(x + 720) = x^3 + 720xx = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, man setze $x = 8y$,

so wird $8^3 y^3 + 720 \cdot 8^2 y^2 = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$

durch 8^3 dividirt wird $y^3 + 90\, y^2 = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, es sey nun $y = 2z$,

so wird $8\, z^3 + 4 \cdot 90zz = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$

durch 8 dividirt wird $z^3 + 45zz = 4^2 . 81^2$. Man setze ferner $z = 9u$,
so wird $9^3 u^3 + 45 . 9^2 uu = 4^2 . 9^4$
durch 9^3 dividirt wird $u^3 + 5uu = 4^2 . 9$ oder $uu(u+5) = 16 . 9 = 144$. Hier sieht man offenbar, daß $u = 4$: denn da wird $uu = 16$ und $u + 5 = 9$: da nun $u = 4$ so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war, die größere aber 1296; wovon die Quadratwurzel 36, welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt giebt 20736.

168.

Anmerkung: Diese Frage kann bequemer folgender Gestalt aufgelöset werden: weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß, indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte: So sey die größere Zahl xx, die kleinere also $xx-720$, welche mit der Quadratwurzel jener, das ist mit x multiplicirt, giebt $x^3 - 720x = 20736 = 64 . 27 . 12$ man setze $x = 4y$,
so wird $64y^3 - 720 . 4y = 64 . 27 . 12$:
durch 64 dividirt wird $y^3 - 45y = 27 . 12$: man setze ferner $y = 3z$,
so wird $27z^3 - 135z = 27 . 12$:
durch 27 dividirt wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$. Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, davon sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$ so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; daher ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$ daher ist die größere Zahl $xx = 1296$, und die kleinere $xx - 720 = 576$ wie oben.

169.

IV. Frage: Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. So man nun diese Differenz multiplicirt mit der Summe ihrer Cuborum, so kommen 102144: welche Zahlen sind es?

Es

Es sey die kleinere x, so ist die größere $x + 12$, der Cubus der ersteren ist x^3, der andern aber $x^3 + 36xx + 432x + 1728$, die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt $12(2x^3 + 36xx + 432x + 1728) = 102144$; durch 12 dividirt wird $2x^3 + 36xx + 432x + 1728 = 8512$, durch 2 dividirt giebt $x^3 + 18xx + 216x + 864 = 4256$ oder $x^3 + 18xx + 216x = 3392 = 8 \cdot 8 \cdot 53$. Man setze $x = 2y$ und dividire sogleich durch 8, so wird $y^3 + 9yy + 54y = 8 \cdot 53 = 424$.

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, 8, 53, ꝛc. wovon 1 und 2 zu klein sind: setzt man aber $y = 4$, so kommt $64 + 144 + 216 = 424$. Also ist $y = 4$ und $x = 8$; daher sind die beyden Zahlen 8 und 20.

170.

V. Frage: Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Fl. einlegt, als der Personen sind, gewinnen je mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind. Nun findet sich daß der Gewinnst zusammen betrage 392 Fl. wie viel sind der Gesellen gewesen?

Man setze es seyn x Gesellen gewesen, so legt einer $10x$ Fl. ein, alle aber legen $10xx$ Fl. ein, und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie $x + 6$ Fl. und mit dem ganzen Capital gewinnen sie $\frac{x^3 + 6xx}{10} = 392$

Mit 10 multiplicirt kommt $x^3 + 6xx = 3920$. Setzt man nun $x = 2y$

so erhält man $8y^3 + 24yy = 3920$

welches durch 8 dividirt giebt $y^3 + 3yy = 490$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 5, 7, 10, ꝛc. wovon 1, 2 und 5 zu klein sind.

Setzt man aber $y = 7$, so kommt $343 + 147 = 490$, also ist $y = 7$ und $x = 14$

Antwort: Es sind 14 Gesellen gewesen, und hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

171.

VI. Frage: Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthl. dazu legt ein jeder noch 40mal so viel Rthl. als der Gesellen sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Pr. C. als der Gesellen sind: hierauf theilen sie den Gewinnst und da findet es sich, daß nachdem ein jeder zehn mal so viel Rthl. genommen hat als der Gesellen sind, so bleiben noch 224 Rthl. übrig. Wie viel sind es Gesellen gewesen?

Die Zahl der Gesellen sey $= x$, so legt ein jeder noch $40x$ Rthl. zu dem Capital von 8240 Rthl. alle zusammen legen also dazu noch $40xx$ Rthl. also war die ganze Summe $40xx + 8240$ mit dieser gewinnen sie von 100, x Rthl. daher wird der ganze Gewinnst seyn:

$$\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824x}{10} = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5}.$$

Hiervon nimmt nun ein jeder $10x$ Rthl. und also alle zusammen $10xx$ Rthl. und da bleiben noch 224 Rthl. übrig, woraus erhellet, daß der Gewinnst gewesen sey: $10xx + 224$ woraus diese Gleichung entsteht

$$\frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5} = 10xx + 224,$$

welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt wird $x^3 + 206x = 25xx + 560$ oder $x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0$. Doch um zu probiren wird die erste Form bequemer seyn, da nun die Theiler des letzten Glieds sind:

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, ꝛc. welche Positiv genommen werden müssen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind. Probirt man nun mit $x=1$ oder $x=2$, so ist offenbar, daß der erste Theil viel kleiner werde als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren:

Wenn $x=4$, so wird $64 + 824 = 400 + 560$ trifft nicht zu.

Wenn $x=5$, so wird $125+1030=625+560$ trifft nicht zu. Wenn $x=7$, so wird $343+1442=1225+560$ trifft zu: daher ist $x=7$ eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch $x-7$ wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x-7)\ x^3 - 25xx + 206x - 560\ (xx - 18x + 80 \\
\quad x^3 - 7xx \\
\hline
\quad\quad -18xx + 206x \\
\quad\quad -18xx + 126x \\
\hline
\quad\quad\quad 80x - 560 \\
\quad\quad\quad 80x - 560 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Man setze also den Quotienten gleich 0, so hat man $xx-18x+80=0$ oder $xx=18x-80$ daher $x=9\pm1$, also sind die beyden andern Wurzeln $x=8$ und $x=10$.

Antwort: auf diese Frage finden also drey Antworten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beygefügte Probe anzeigt.

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein 40x : : : : :	280	320	400
also zusammen legen ein 40xx : :	1960	2560	4000
das alte Capital war : : : :	8240	8240	8240
das ganze Capital ist 40xx + 8240	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. C. als der Gesellen sind : :	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg 10x :	70	80	100
also alle zusammen 10xx : : :	490	640	1000
bleibt also noch übrig : : : :	224	224	224



Capitel 12.

Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei.

172.

Wenn eine cubische Gleichung auf ganze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Glieds eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in ganzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = 0$, wo a, b und c ganze Zahlen sind, denn wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$, so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt, oder ganze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können 0 werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzel der Gleichung weder ganze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben Irrational und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darinn für Wurzelzeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem Cardano oder vielmehr dem Scipioni Ferreo zugeschrieben worden,

welche

welche deswegen verdient hier mit allem Fleiße erklärt zu werden.

174.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Cubi, dessen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey demnach die Wurzel $a + b$, so ist der Cubus davon $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, welche erstlich aus dem Cubo eines jeden Theils besteht und außer denselben noch die zwey Mittel-Glieder enthält, nämlich $3aab + 3abb$, welche beyde $3ab$ zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a + b$. Denn $3ab$ mit $a + b$ multiplicirt giebt $3aab + 3abb$. Diese zwey Glieder enthalten also das dreyfache Product der beyden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

175.

Man setze nun es sey $x = a + b$, und nehme beyderseits die Cubi, so wird $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Da nun $a + b = x$ ist, so hat man diese cubische Gleichung $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$, oder $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$ von welcher wir wissen, daß eine Wurzel sey $x = a + b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt, so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a = 2$ und $b = 3$, so bekommt man diese Gleichung $x^3 = 18x + 35$, von welcher wir gewiß wissen, daß $x = 5$ eine Wurzel ist.

176.

Man setze nun ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so wird $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$, folglich $ab = \sqrt[3]{pq}$; wenn daher

her diese cubische Gleichung vorkommt $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$ so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß sowohl $3\sqrt[3]{pq}$ als $p + q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine jede cubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

177.

Es sey daher diese allgemeine cubische Gleichung vorgegeben $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p + q$ der Zahl g gleich werde, und alsdenn wissen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

178.

Man hat also diese zwey Gleichungen aufzulösen I.) $3\sqrt[3]{pq} = f$ und II.) $p + q = g$. Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ und $4pq = \frac{4}{27}f^3$: die andere Gleichung quadrire man, so kommt $pp + 2pq + qq = gg$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}f^3$, so wird $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$ woraus die Quadratwurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$. Da nun $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$ und $2q = g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$ daher erhalten wir $p = \frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$ und $q = \frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$.

179.

Wenn also eine solche cubische Gleichung vorkommt $x^3 = fx + g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit $x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$; woraus erhellet daß diese Irrationalität nicht nur das Quadratwurzelzeichen sondern auch das Cubische in sich fasse: und diese Formel ist dasjenige was die Regel des Cardani genennt zu werden pflegt.

180.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern:

Es sey $x^3 = 6x + 9$ so ist hier $f = 6$ und $g = 9$, also $gg = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$: Daher $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = 7$; daher wird von der vorgegebenen Gleichung eine Wurzel seyn $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Also ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

181.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, also $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27}f^3 = 4$; folglich die Quadratwurzel aus $gg - \frac{4}{27}f^3 = 0$; daher eine Wurzel seyn wird $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

182.

182.

Wenn aber gleich eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch öfters daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird ob sie gleich darinnen steckt.

Es sey gegeben diese Gleichung $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$ ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$ oder $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$ welche Formel wirklich 4 ist, ohngeachtet solches nicht sogleich daraus erhellet.

Denn da der Cubus von $2 + \sqrt{2}$ ist $20 + 14\sqrt{2}$, so ist umgekehrt die Cubicwurzel aus $20 + 14\sqrt{2}$ gleich $2 + \sqrt{2}$, und eben so auch $\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$, hieraus wird unsere Wurzel $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

183.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle cubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darinn das zweyte Glied fehlt. Es ist aber zu merken, daß eine jede vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige cubische Gleichung vorgegeben, $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Da nehme man nun den dritten Theil der Zahl 6 im andern Glied und setze $x - 2 = y$; so

so wird $x = y + 2$, und die übrige Rechnung wie folget:
da $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$ und
$x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx &= \quad -6yy - 24y - 24 \\ +11x &= \quad\quad +11y + 22 \\ -6 &= \quad\quad\quad -6 \end{aligned}$$

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = y^3 \quad -y.$$

Daher erhalten wir diese Gleichung $y^3 - y = 0$ deren Auflösung so gleich in die Augen fällt: denn nach den Factoren hat man $y(yy-1) = y(y+1)(y-1) = 0$; setzt man nun einen jeden Factor gleich 0 so bekommt man:

$$\text{I.} \begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} y = -1, \\ x = 1, \end{cases} \quad \text{III.} \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

welches die drey schon oben gefundenen Wurzeln sind.

184.

Es sey nun diese allgemeine cubische Gleichung gegeben: $x^3 + axx + bx + c = 0$ aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden soll.

Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweyten Glieds mit ihrem Zeichen und schreibe dafür einen neuen Buchstaben z. E. y, dieser Regel zu folge werden wir haben $x + \frac{1}{3}a = y$ und also $x = y - \frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung entsteht:

$x = y - \frac{1}{3}a$, $xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$ ferner $x^3 = y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$; also

$x^3 = y^3$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - ayy + \tfrac{1}{3}aay - \tfrac{1}{27}a^3 \\ axx &= \quad + ayy - \tfrac{2}{3}aay + \tfrac{1}{9}a^3 \\ bx &= \quad\quad + by - \tfrac{1}{3}ab \\ c &= \quad\quad\quad + c \end{aligned}$$

$$y^3 - (\tfrac{1}{3}aa - b)y + \tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c = 0$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

185.

Nun kann man auch des Cardani Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Denn da wir oben die Gleichung hatten $x^3 = fx + g$ oder $x^3 - fx - g = 0$, so wird für unsern Fall $f = \frac{1}{3}aa - b$, und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab \pm c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

und da solcher Gestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x = y - \frac{1}{3}a$.

186.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande die Wurzeln von allen cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$. Um hier das zweyte Glied wegzubringen, so setze man $x - 2 = y$, so wird:

$x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, ferner $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, also

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx &= \quad -6yy - 24y - 24 \\ +13x &= \quad\quad +13y + 26 \\ -12 &= \quad\quad\quad -12 \end{aligned}$$

$$y^3 + y - 2 = 0$$

oder

oder $y^3 = -y + 2$, welche mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen giebt $f = -1$, $g = 2$; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27} f^3 = -\frac{4}{27}$.

Also $gg - \frac{4}{27} f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; daher erhalten wir $\sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$ woraus folget

$$y = \sqrt[3]{\left\{\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right\}} \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ oder } y$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ oder } y$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}\right)}, \text{ oder } y$$

$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})}$; und hernach bekommt man $x = y + 2$.

187.

Bey Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen, gleich wohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechter Dinges Irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$ wirkliche Cubi wären. Dieses trifft auch hier zu, denn da der Cubus von $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist, so ist die Cubicwurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ und die Cubicwurzel aus

$27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für y seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$ so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auch finden so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren, wie folget

$$
\begin{array}{l}
x - 3)\; x^3 - 6xx + 13x - 12\; (xx - 3x + 4 \\
\qquad\;\; \underline{x^3 - 3xx} \\
\qquad\qquad - 3xx + 13x \\
\qquad\qquad \underline{- 3xx + 9x} \\
\qquad\qquad\qquad + 4x - 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ 4x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

und diesen Quotienten $xx - 3x + 4 = 0$ setzen, also daß $xx = 3x - 4$ und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - \frac{16}{4})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beyden andern Wurzeln, welche beyde imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien wirklich die Cubicwurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rationalwurzel hat, die daher weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können: wenn aber keine Rationalwurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders

anders als auf diese Art nach des Cardani Regel ausgedruckt werden, so daß alsdenn keine weitere Abkürzung Platz findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Daher gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

Capitel 13.

Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genennt werden.

189.

Wenn die höchste Potestät der Zahl x zum vierten Grad hinauf steiget, so werden solche Gleichungen vom vierten Grad auch biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird: $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor die so genannten reinen biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man so gleich die Wurzel findet, wenn man beyderseits die Wurzel vom vierten Grad auszieht, da man denn erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Da x^4 das Quadrat ist von xx so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wenn man erstlich nur die Quadratwurzel ausziehet, da man denn bekommt $xx = \sqrt{f}$: hernach zieht man nochmals die Quadratwurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, also

 daß

daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von f.

Hätte man z. E. diese Gleichung $x^4 = 2401$ so findet man daraus erstlich $xx = 49$ und ferner $x = 7$.

191.

Solcher gestalt aber findet man nur eine Wurzel, und da immer drey cubische Wurzeln statt finden, so ist kein Zweifel, daß hier nicht vier Wurzeln sollten Platz haben, welche inzwischen auch auf diese Art heraus gebracht werden können. Denn da aus dem letzten Exempel nicht nur folget $xx = 49$ sondern auch $xx = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwey Wurzeln $x = 7$, $x = -7$ aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ welches die vier biquadratische Wurzeln sind aus 2401. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192.

Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweyte und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben:
$x^4 + fxx + g = 0$, als welche nach der Regel der quadratischen Gleichungen aufgelößt werden können. Denn setzt man $xx = y$ so hat man $yy + fy + g = 0$, oder $yy = -fy - g$ woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ff - g)} = \frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}$. Da nun $xx = y$, so wird daraus $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}}$ wo die zweydeutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, so kann man dieselbe immer als ein Product aus vier Factoren ansehen. Denn multiplicirt man diese vier Factores mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ so findet man folgendes Product $x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq + pr + ps + qr + qs + rs)xx - (pqr + pqs + prs + qrs)x + pqrs$, welche Formel nicht anders gleich 0 werden kann, als wenn einer von obigen vier Factoren $= 0$ ist. Dieses kann demnach auf viererley Art geschehen, I.) wenn $x = p$, II.) $x = q$, III.) $x = r$, IV.) $x = s$, welches demnach die vier Wurzeln dieser Gleichung sind.

194.

Betrachten wir diese Form etwas genauer, so finden wir, daß in dem zweyten Glied die Summe aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Glied findet sich die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit xx multiplicirt ist, im vierten Glied sieht man die Summe der Producte aus je drey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $-x$, multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche biquadratische Gleichung keine andere Rationalwurzel haben, als welche zugleich Theiler des letzten Glieds sind, daher man aus diesem Grund alle Rationalwurzeln, wenn dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wenn man für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Glieds

setzt und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe, hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. E. $x = p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ dividiren und den Quotienten gleich 0 setzen, welche eine cubische Gleichung geben wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelöst werden kann.

196.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus ganzen Zahlen bestehen, und daß das erste bloß da stehe, oder nur mit 1 multiplicirt sey: kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, so müssen dieselben vorher weggeschafft werden, welches jederzeit geschehen kann, wenn man für x schreibt y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt;

Als wenn diese Gleichung vorkäme $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0$, so setze man, weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potestäten vorkommen

$x = \frac{y}{6}$, so wird $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, welche mit 6^4 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$. Wollte man nun suchen ob diese Gleichung Rationalwurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben um zu sehen, in welchen Fällen die Formel wirklich 0 werde.

197.

Da aber die Wurzeln sowohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anstellen, die erste indem derselbe positiv, die andere indem derselbe negativ genommen würde: man hat aber auch hier wiederum zu bemerken, daß

so

so oft die zwey Zeichen + und − mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müssen. Da nun in unserm Exempel 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Glieds negativ zu nehmen.

198.

Es sey z. E. diese Gleichung vorgegeben $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$. Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln haben müsse, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müssen. Da nun diese Theiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, so probire man erstlich mit $x = +1$ so kommt wirklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$ so kommt folgendes $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$ und daher giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$ so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; hingegen $x = -2$ geht nicht an. Setzt man weiter $x = 3$ so kommt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$ geht also auch nicht an: man setze aber $x = -3$ so kommt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, folglich ist $x = -3$ eine Wurzel; eben so findet man auch, daß $x = -4$ eine Wurzel seyn werde, also daß alle vier Wurzel Rational sind und sich also verhalten, I.) $x = 1$, II.) $x = 2$, III.) $x = -3$, IV.) $x = -4$, von welchen zwey positiv und zwey negativ sind, wie die obige Regel anzeigt.

199.

Wenn aber keine Wurzel Rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden: daher man auf solche

solche Mittel bedacht gewesen, um in diesen Fällen die Irrationalwurzeln ausdrücken zu können. Hierinn ist man auch so glücklich gewesen, daß man zweyerley verschiedene Wege entdeckt habe, um zur Erkenntniß solcher Wurzeln zu gelangen, die biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Wege erörtern, so wird es dienlich seyn einige besondere Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

200.

Wenn die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschiehet: $x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0$, welche noch etwas allgemeiner also vorgestellt werden kann: $x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0$. So kann eine solche Form allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Formeln sind, angesehen werden und die sich leicht bestimmen lassen: denn man setze für diese Gleichung folgendes Product $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung heraus komme. Es wird aber durch die wirkliche Multiplication gefunden $x^4 + (p + q)ax^3 + (pq + 2)aaxx + (p + q)a^3x + a^4 = 0$; damit also diese Gleichung mit der vorgegebenen einerley sey, so werden folgende zwey Stücke erfordert I.) daß $p + q = m$, und II.) daß $pq + 2 = n$, folglich $pq = n - 2$.

Die erstere quadrirt giebt $pp + 2pq + qq = mm$, davon die andere viermal genommen, nämlich $4pq = 4n - 8$, subtrahirt bleibt über $pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8$: davon die Quadratwurzel ist: $p - q = \sqrt{(mm - 4n + 8)}$. Da nun $p + q = m$ so

so erhalten wir durch die Addition $2p = m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ oder $p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$; durch die Subtraction aber bekommen wir $2q = m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ oder $q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren $= 0$ setzen, um daraus die Werthe von x zu finden:

der erste giebt $xx + pax + aa = 0$ oder $xx = -pax - aa$, woraus man findet $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ppaa}{4} - aa\right)}$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{\left(\frac{pp}{4} - 1\right)}$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp - 4)}$; der andere Factor giebt aber $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq - 4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

201.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$. Hier ist nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, daher $mm - 4n + 8 = 36$ und die Quadratwurzel daraus $= 6$; daher bekommen wir $p = -\frac{4 + 6}{2} = 1$ und $q = -\frac{4 - 6}{2} = -5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden; I.) und II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; und ferner die III.) und IV.) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$: also sind die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung folgende

 I.) x

I.) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, II.) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

III.) $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, IV.) $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$,

wovon die zwey ersten imaginär oder unmöglich sind, die beyden andern aber möglich, weil man $\sqrt{21}$ so genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimalbrüche ausdrückt. Denn da 21 so viel als 21, 00000000 so ziehe man daraus die Quadratwurzel wie folget:

```
          21|00|00|00|00|4, 5825
          16|
       85 |500
          |425
      908 |7500
          |7264
     9162 |23600
          |18324
    91645 |527600
          |458225
           69375
```

Da nun $\sqrt{21} = 4, 5825$ so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4, 7912$, und die vierte $x = 0, 2087$ welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$ so bekommt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$ und dieses sollte $= 0$ seyn, welches ziemlich genau eintrifft.

202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich; nur daß

daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben: eine solche Gleichung ist demnach: $x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$ welche durch folgendes Product kann vorgestellet werden $(xx + pax - aa)\ (xx + qax - aa) = 0$. Denn durch die Multiplication bekommt man $x^4 + (p + q)\ ax^3 + (pq - 2)\ aaxx - (p + q)\ a^3x + a^4$ welche mit der vorgegebenen einerley wird, wenn erstlich $p + q = m$ und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; denn solcher gestalt wird das vierte Glied von selbst einerley: man quadrire wie vor die erste Gleichung, so hat man $pp + 2pq + qq = mm$, davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$. woraus die Quadratwurzel giebt $p - q = \surd (mm - 4n - 8)$, und daher erhalten wir $p = \frac{m + \surd (mm - 4n - 8)}{2}$ und $q = \frac{m - \surd (mm - 4n - 8)}{2}$.

Hat man nun p und q gefunden so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a \surd (pp + 4)$ und der zweyte Factor giebt diese $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a \surd (qq + 4)$ und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

203.

Es sey z. E. diese Gleichung gegeben $x^4 - 3.2x^3 + 3.8x + 16 = 0$, hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$, daher $\surd (mm - 4n - 8) = 1$, folglich $p = \frac{-3 + 1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3 - 1}{2} = -2$ woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \surd 5$ und die zwey letztern $x = 2 \pm \surd 8$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden: I.) $x = 1 + \surd 5$, II.) $x = 1 - \surd 5$, III.) $x = 2 + \surd 8$, IV.) $x = 2 - \surd 8$. Woraus die

die vier Factoren unserer Gleichung seyn werden $(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{8})(x-2+\sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müssen. Denn der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx-2x-4$ und die beyden andern geben $xx-4x-4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4-6x^3+24x+16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

Capitel 14.

Von des Pombelli Regel die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf Cubische zu bringen.

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die cubische Gleichungen durch Hülfe des Cardani Regel aufgelöst werden können, so kommt die Hauptsache bey den biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf cubische Gleichungen zu bringen wisse. Denn ohne Hülfe der cubischen Gleichungen ist nicht möglich die biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: denn wenn man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine cubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Namens Pombelli, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen:

Es

Es sey demnach die allgemeine biquadratische Gleichung gegeben $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinnliche Zahlen bedeuten können: nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo es nur darauf ankommt die Buchstaben p und q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx &+ apx + pp \\ + 2pxx &- 2qrx - rr \\ - qqxx & \end{aligned}$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, woraus man hat $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, für das vierte Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$, woraus man hat $2qr = ap - c$ für das letzte Glied aber $pp - rr = d$, woraus wird $rr = pp - d$. Aus diesen drey Gleichungen müssen nun die drey Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

206.

Um dieses auf die leichteste Art zu verrichten, so nehme man die erste viermal, welche seyn wird $4qq = aa + 8p - 4b$, diese multiplicire man mit der letzten $rr = pp - d$, so bekommt man:
$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$ nun quadrire man die mittlere Gleichung $4qqrr = aapp - 2acp + cc$: wir haben also zweyerley Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich gesetzt diese Gleichung geben $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$; und alle Glieder auf eine Seite gebracht, geben $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc$ welches eine cubische Gleichung ist, daraus

aus in einem jeden Fall der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drey Werthe des Buchstaben p gefunden, worzu es genung ist nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus so gleich die beyden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn $q = \surd(\frac{1}{4}aa + 2p - b)$ und aus der zweyten erhält man $r = \frac{ap-c}{2q}$. Wenn aber diese drey Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgender Gestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, so ist $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$; daraus die Quadratwurzel gezogen wird $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$.
Die erstere giebt $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$ woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$.

208.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$, welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$ aus welchen für den Buchstaben p zu bestimmen folgende Gleichung erwächst $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche durch vier dividirt giebt $2p^3 - 35pp + 202d - 385 = 0$. Die Theiler der letzten Zahl sind

1, 5, 7,

1, 5, 7, 11, ꝛc. von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$, so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$: will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden, so dividire man die Gleichung durch 2, so kommt $p^3 - \frac{35}{2} pp + 101\, p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Glied $\frac{35}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen, so muß die dritte seyn $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genung nur eine zu wissen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer biquadratischen Gleichung herauskommen müssen.

209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdenn $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$ und $r = -\frac{50 + 50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: daher unsere beyde Quadratgleichungen seyn werden:

I.) $xx = 5x - 4$, II.) $xx = 5x - 6$

die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$:

Die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$, so wird $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ und $r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$ woraus diese zwey Quadratgleichungen entstehen

I.) xx

I.) $xx = 7x - 12$ II.) $xx = 3x - 2$; deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, daher $x = 4$ und $x = 3$: die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, daher $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden. Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werthe $p = \frac{11}{2}$. Denn da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden quadratischen Gleichungen seyn werden.

I.) $xx = 6x - 8$, II.) $xx = 4x - 3$:

aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$, welche die schon gefundene vier Wurzeln sind.

210.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher ist $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$; daher unsere cubische Gleichung seyn wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man setzt $p = 2t$; da wird nämlich $8t^3 + 24t - 32 = 0$, oder $t^3 + 3t - 4 = 0$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Daher sind die beyden Quadratgleichungen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$, daher die Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bey dem folgenden Exempel ganz wiederholen:

Es

Es sey demnach diese Gleichung gegeben $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte ist der Zahl -6 im zweyten Glied der Gleichung. Diese Form aber entwickelt giebt $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)\,xx - (6p + 2qr)\,x + pp - rr = 0$, mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung, so bekommt man:

I.) $2p + 9 - qq = 12$, II.) $6p + 2qr = 12$, III.) $pp - rr = 4$; aus der ersten erhalten wir $qq = 2p - 3$, aus der zweyten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$, aus der dritten $rr = pp - 4$: nun multiplicire man rr und qq mit einander, so bekommt man $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $qqrr = 36 - 36p + 9pp$: daher erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel ist $p = 2$; daraus wird $qq = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, daraus die Quadratwurzel $xx - 3x + 2 = \pm x$: gilt das obere Zeichen, so hat man $xx = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $xx = 2x - 2$: woraus diese vier Wurzeln gefunden werden $x = 2 \pm \sqrt{2}$, und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.



Capitel 15.

Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

212.

Wie durch die obige Regel des Pombelli die biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer cubischen aufgelöst werden, so ist seit dem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welcher von dem vorigen gänzlich unterschieden ist, und eine besondere Erklärung verdienet.

213.

Man setze nämlich, die Wurzel einer biquadratischen Gleichung habe diese Form $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen cubischen Gleichung andeuten.

$z^3 - fzz + gz - h = 0$, also daß seyn wird $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ und $pqr = h$: dieses vorausgesetzt, so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, da kommt heraus $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$, so wird $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$: nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird $x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}$. Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, so wird $x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$; da aber $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ und $pqr = h$, also $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser biquadratischen Gleichung $x^4 - 2fxx - 8x\sqrt{h} + ff - 4g = 0$, wovon die Wurzel

zel gewiß ist $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, und wo p, q und r die drey Wurzeln sind der obigen cubischen Gleichung.

$$z^3 - fzz + gz - h = 0$$

214.

Die herausgebrachte biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darinn mangelt. Denn man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es sey demnach diese biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 - axx - bx - c = 0$, wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe daher mit der gefundenen Form, um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Darzu wird erfordert, daß I.) $2f = a$ also $f = \frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h} = b$ also $h = \frac{bb}{64}$ III.) $ff - 4g = -c$ oder, $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, oder $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, folglich $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

215.

Aus der vorgegebenen Gleichung $x^4 - axx - bx - c = 0$ findet man demnach die Buchstaben f, g und h also bestimmt $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, und $h = \frac{1}{64}bb$ oder $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daraus formire man diese cubische Gleichung: $z^3 - fzz + gz - h = 0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Dieselben seyn nun I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$: aus welchen, wenn sie gefunden worden, eine Wurzel unserer biquadratischen Gleichung seyn wird $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

216.

Solcher Gestalt scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden werde, allein da ein

jedes Quadratwurzel-Zeichen sowohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form so gar alle vier Wurzeln.

Wollte man zwar alle Veränderungen der Zeichen gelten lassen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemerken, daß das Product dieser drey Glieder, nämlich $\sqrt{pqr}$ gleich seyn müsse den $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daher wenn $\frac{1}{8}b$ positiv ist, so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Fall nur diese vier Aenderungen gelten.

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$,

II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$,

III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$,

IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$,

ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende:

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$,

II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$,

III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$,

IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$.

Durch Hülfe dieser Anmerkung können in jeglichem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

217.

Es sey diese biquadratische Gleichung vorgegeben in welcher das zweyte Glied fehlt $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$, welche mit der obigen Formel verglichen giebt $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$, woraus man ferner

ner

ner erhält $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$ und $h = \frac{225}{4}$: also ist unsere cubische Gleichung

$$z^3 - \tfrac{25}{2} zz + \tfrac{769}{16} z - \frac{225}{4} = 0,$$

Um hier die Brüche wegzubringen, so setze man $z = \frac{u}{4}$ so wird $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{uu}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, welche mit 64 multiplicirt giebt $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$, wovon die drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wnrzel ist $u = 9$, um die andere zu finden, so theile man $u^3 - 50uu + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und da kommt diese neue Gleichung $uu - 41u + 400 = 0$, oder $uu = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)} = \frac{41 \pm 9}{2}$: also sind die drey Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, daher wir erhalten:

I.) $z = \frac{9}{4}$, II.) $z = 4$, III.) $z = \frac{25}{4}$.

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, also daß $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$, $r = \frac{25}{4}$; weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$, und dieser Werth $= \frac{1}{2} b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, darnach richten: es muß nämlich entweder nur ein minus oder drey minus vorhanden seyn: da nun $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$ $\sqrt{q} = 2$ und $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, so werden die vier Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

I.) $x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$,
II.) $x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$,
III.) $x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$,
IV.) $x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6$,

aus welchen diese vier Factoren der Gleichung entstehen $(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0$, wovon die beyde ersten geben $xx-3x+2$, die beyden letztern aber $xx+3x-18$, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt bringen just unsere Gleichung hervor.

218.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie eine biquadratische Gleichung, in der das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darinn das zweyte Glied fehlt, worzu folgende Regel dienet.

Es sey diese allgemeine Gleichung gegeben $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Hier setze man zu y den vierten Theil der Zahl des andern Glieds, nämlich $\frac{1}{4}a$, und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x, also daß $y+\frac{1}{4}a=x$ folglich $y=x-\frac{1}{4}a$; daraus wird $yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa$, ferner $y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{3}{16}aax-\frac{1}{64}a^3$, und daraus endlich:

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}aaxx - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 = & \quad + ax^3 - \frac{3}{4}aaxx + \frac{3}{16}a^3x - \frac{1}{64}a^4 \\
+byy = & \qquad + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
+cy = & \qquad\qquad + cx - \frac{1}{4}ac \\
+d = & \qquad\qquad\qquad + d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
x^4 + 0 - \frac{3}{8}aaxx + \frac{1}{8}a^3x - \frac{3}{256}a^4 \\
+ bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
+ cx - \frac{1}{4}ac \\
+ d
\end{array}\right\} = 0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, also daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden, und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y von selbst sich ergeben, weil $y=x-\frac{1}{4}a$.

219. So

219.

So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nämlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen von fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen sind fruchtlos gewesen, also daß man nicht im Stand ist allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles, was darinnen geleistet worden, geht nur auf ganz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wenn irgend eine Rationalwurzel statt findet, als welche durch probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Glieds seyn muß: und hiermit ist es eben so beschaffen, wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grad gelehret haben.

220.

Es wird doch noch nöthig seyn diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind:

Eine solche Gleichung sey nun diese $y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0$. Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen, daher setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil der Zahl des zweyten Glieds, nämlich $y - 2 = x$, so wird $y = x + 2$ und $yy = xx + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$.

$$\begin{array}{rcrrrrr}
\text{und } y^4 & = & x^4 + 8x^3 & + 24xx & + 32x & + 16 \\
-8y^3 & = & -8x^3 & - 48xx & - 96x & - 64 \\
+14yy & = & & + 14xx & + 56x & + 56 \\
+4y & = & & & + 4x & + 8 \\
-8 & = & & & & - 8 \\
\hline
 & & x^4 + 0 & - 10xx & - 4x & + 8 = 0,
\end{array}$$

 welche

welche mit unserer allgemeinen Form verglichen, giebt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das Product $\sqrt{pqr}$, positiv seyn wird. Die cubische Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz + \frac{17}{4} z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher cubischen Gleichung die drey Wurzeln p, q und r gesucht werden müssen.

221.

Hier müssen nun erstlich die Brüche weggeschafft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$ so wird $\frac{u^3}{8} \mp \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Glieds sind 1 und 2, so sey erstlich $u = 1$, da wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$, und also nicht 0, setzt man aber $u = 2$, so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$, welches ein Genüge leistet. Daher ist eine Wurzel $u = 2$: um die andere zu finden, so theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$
\begin{array}{l}
u-2)\; u^3 - 10uu + 17u - 2\; (uu - 8u + 1 \\
\qquad\;\; \underline{u^3 - 2uu} \\
\qquad\qquad\; -8uu + 17u \\
\qquad\qquad\; \underline{-8uu + 16u} \\
\qquad\qquad\qquad\quad u - 2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{u - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

und da bekommt man $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Da nun $z = \frac{1}{2} u$, so sind die drey Wurzeln der cubischen Gleichung:

I.) $z =$

I.) $z = p = 1$, II.) $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$, III.) $z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$.

222.

Da wir nun p, q und r gefunden, so werden ihre Quadratwurzeln seyn $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})}}{2}$, $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}$.

Aus demjenigen aber, was oben ist gezeigt worden, da die Quadratwurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wenn $\sqrt{(aa - b)} = c$, also ausgedrückt worden $\sqrt{(a \pm b)} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, so ist für unsern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$, folglich $b = 60$, daher $c = 2$, hieraus bekommen wir $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und $\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Da wir nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für x, da wir wissen, daß derselben Product positiv seyn muß, folgender Gestalt beschaffen seyn.

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$

 III.) x = -

III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$
$= -1 + \sqrt{3}$.

IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$
$= -1 - \sqrt{3}$.

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

I.) $y = 3 + \sqrt{5}$,
II.) $y = 3 - \sqrt{5}$,
III.) $y = 1 + \sqrt{3}$,
IV.) $y = 1 - \sqrt{3}$.

Capitel 16.

Von der Auflösung der Gleichungen durch die Näherung.

223.

Wenn die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzelzeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschiehet, so muß man sich begnügen, den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, dergestalt, daß man dem wahren Werth derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich vor nichts zu achten. Es sind zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmsten hier erklären wollen.

224.

Das erste Mittel besteht darinn, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, also daß

daß man wisse daß derselbe z. E. größer sey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdenn setze man den Werth der Wurzel $= 4 + p$, da denn p gewiß einen Bruch bedeuten wird; ist aber p ein Bruch und also kleiner als 1, so ist das Quadrat von p, der Cubus und eine jegliche höhere Potestät noch weit kleiner, daher man dieselbe aus der Rechnung weglassen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur beynahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel $4 + p$ schon genauer: hieraus erforscht man gleicher gestalt einen noch genauern Werth, und geht solchergestalt so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen, als man wünschet.

225.

Wir wollen dieses zuerst durch ein leichtes Exempel erläutern, und die Wurzel dieser Gleichung $xx = 20$ durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun daß x größer ist als 4, und doch kleiner als 5, daher setze man $x = 4 + p$, so wird $xx = 16 + 8p + pp = 20$; weil aber pp sehr klein ist, so lasse man dieses Glied weg, um diese Gleichung zu haben $16 + 8p = 20$, oder $8p = 4$, daraus wird $p = \frac{1}{2}$ und $x = 4\frac{1}{2}$ welches der Wahrheit schon weit näher kommt: man setze daher ferner $x = 4\frac{1}{2} + p$, so ist man gewiß, daß p ein noch weit kleinerer Bruch seyn werde, als vorher; daher pp jetzt mit größerm Recht weggelassen werden könne. Man wird also haben $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, oder $9p = -\frac{1}{4}$, und also $p = -\frac{1}{36}$, folglich $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man $x = 4\frac{17}{36} + p$, so bekommt man $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$; daher $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$ mit 36 multiplicirt kommt $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$ und daraus wird $p = -\frac{1}{36.322} = -\frac{1}{11592}$, folglich $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, welcher Werth der Wahrheit

heit so nahe kommt, daß der Fehler sicher als nichts angesehen werden kann.

226.

Um dieses allgemeiner zu machen, so sey gegeben diese Gleichung $xx = a$, und man wisse schon, daß x größer ist als n, doch aber kleiner als $n + 1$; man setze also $x = n + p$, also daß p ein Bruch seyn muß, und daher pp als sehr klein verworfen werden kann, daraus bekommt man $xx = nn + 2np = a$, also $2np = a - nn$ und $p = \frac{a - nn}{2n}$, folglich $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit schon nahe, so kommt dieser neue Werth $\frac{nn + a}{2n}$ der Wahrheit noch weit näher. Diesen setze man von neuem für n, so wird man der Wahrheit noch näher kommen, und wenn man diesen neuern Werth nochmal für n setzet, so wird man noch näher zutreffen; und solchergestalt kann man fortgehen, so weit man will.

Es sey z. E. $a = 2$, oder man verlangt die Quadratwurzel aus 2 zu wissen: hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden, welcher n gesetzt werde, so wird $\frac{nn + 2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben. Es sey daher.

I.) $n = 1$ so wird $x = \frac{3}{2}$

II.) $n = \frac{3}{2}$ so wird $x = \frac{17}{12}$

III.) $n = \frac{17}{12}$ so wird $x = \frac{577}{408}$

welcher letztere Werth dem $\sqrt{2}$ schon so nahe kommt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

227. Eben

227.

Eben so kann man verfahren, wenn die Cubicwurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sey gegeben diese cubische Gleichung $x^3 = a$ oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden; dieselbe sey nun bey nahem $= n$ und man setze $x = n + p$; so wird, wenn man pp und die höheren Potestäten davon wegläßt, $x^3 = n^3 + 3nnp = a$: daher $3nnp = a - n^3$ und $p = \frac{a - n^3}{3nn}$: folglich $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$. Kommt also n dem $\sqrt[3]{a}$ schon nahe, so kommt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n so wird diese Formel der Wahrheit noch weit näher kommen, und so kann man fortgehen so weit als man will. Es sey z. E. $x^3 = 2$ oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welchen die Zahl n schon ziemlich nahe komme, so wird diese Formel $x = \frac{2n^3 + 2}{3nn}$ noch näher kommen; also setze man.

I.) $n = 1$ so wird $x = \frac{4}{3}$
II.) $n = \frac{4}{3}$ so wird $x = \frac{91}{72}$
III.) $n = \frac{91}{72}$ so wird $x = \frac{162130896}{128634294}$.

228.

Diese Methode kann mit gleichem Fortgang gebraucht werden um die Wurzel aus allen Gleichungen durch Näherungen zu finden. Es sey zu diesem Ende die folgende allgemeine cubische Gleichung gegeben $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo n einer Wurzel derselben schon ziemlich nahe kommt; man setze daher $x = n - p$ und da p ein Bruch seyn wird, so lasse man

pp und

pp und die höhern Potestäten davon weg; solcher gestalt bekommt man $xx = nn - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3nnp$, woraus diese Gleichung entsteht:
$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$, oder $n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p$: daher $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$ und folglich bekommen wir für x folgenden genaueren Werth $x = n - \left(\frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}$.
Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n, so erhält man dadurch einen, der der Wahrheit noch näher kommt.

229.

Es sey z. E. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, daher wenn n einer Wurzel schon nahe kommt, so wird ein noch näherer Werth seyn $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$. Nun aber kommt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; daher setze man $n = 3$ so bekommt man $x = \frac{62}{21}$. Wollte man nun diesen Werth wiederum für n schreiben, so würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

230.

Von höheren Gleichungen wollen wir nur dieses Exempel beyfügen $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß sey. Es sey aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4p$ und also $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$ und folg-

folglich $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$ und daher $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$.

Man setze nun $n = 1$ so wird $x = \frac{14}{-1} = -14$, welcher Werth ganz ungeschickt ist, so daher rührt daß der nahe Werth n gar zu klein war, man setze daher $n = 2$ so wird $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, welcher der Wahrheit schon weit näher kommt. Wollte man sich nun die Mühe geben, und für n diesen Bruch $\frac{69}{37}$ schreiben, so würde man zu einem noch weit genauern Werth der Wurzel x gelangen.

231.

Dieses ist nun die bekannteste Art die Wurzeln der Gleichung durch Näherungen zu finden, welche auch in allen Fällen mit Nutzen kann angebracht werden.

Jedoch wollen wir noch eine andere Art anzeigen, welche wegen der Leichtigkeit der Rechnung unsere Aufmerksamkeit verdienet. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von Zahlen suche, als a, b, c, 2c. die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt den Werth der Wurzel um so viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzet.

Laßt uns setzen, wir seyn damit schon gekommen bis zu den Gliedern p, q, r, s, t, 2c. so muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x schon ziemlich genau anzeigen, oder es wird seyn $\frac{q}{p} = x$ beyläufig.

Eben

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p} = xx$. Da ferner auch $\frac{s}{r} = x$ so wird ebenfalls $\frac{s}{p} = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$ so wird $\frac{t}{p} = x^4$, und so weiter.

232.

Um dieses zu erläutern, wollen wir mit dieser quadratischen Gleichung anfangen $xx = x + 1$, und in der obgedachten Reihe von Zahlen kämen nun diese Glieder vor p, q, r, s, t, ꝛc. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = xx$, so erhalten wir daraus diese Gleichung:

$\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$ oder $q + p = r$. Eben so wird auch seyn $s = r + q$ und $t = s + r$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied unserer Reihe Zahlen die Summe ist der beyden vorhergehenden, wodurch die Reihe so weit man will leicht kann fortgesetzt werden, wenn man nur einmal die zwey ersten Glieder hat; dieselben aber kann man nach Belieben annehmen. Daher setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also heraus kommen: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ꝛc. wo von den entfernteren Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt den Werth für x so viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgesetzt. Von Anfang ist zwar der Fehler sehr groß, wird aber je weiter man geht geringer. Diese der Wahrheit immer

mer näher kommende Werthe für x gehen demnach fort wie folget:

$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}$ ꝛc.

wovon z. E. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt, die folgende Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

233.

Laßt uns nun auch diese Gleichung betrachten $xx = 2x + 1$, und weil allezeit $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$, so erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, oder $r = 2q + p$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied doppelt genommen nebst dem vorhergehenden das folgende giebt. Wenn wir also wiederum mit 0, 1 anfangen so bekommen wir folgende Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ꝛc.

daher der gesuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird,

$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}$, ꝛc. welche folglich dem wahren Werth $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$ ꝛc. von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\frac{9801}{4900}$, so nur um $\frac{1}{4900}$ größer ist als 2.

234.

Bey höhern Gleichungen findet diese Methode ebenfalls statt, als wenn diese cubische Gleichung gegeben wäre:

$x^3 = xx + 2x + 1$ so setze man $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ und

$x^3 = \frac{s}{p}$, und da bekommt man $s = r + 2q + p$, woraus man sieht wie man aus drey Gliedern p, q und r das folgende s finden soll, wo man wiederum den Anfang nach Belieben machen kann, eine solche Reihe wird demnach seyn.

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 6,\ 13,\ 28,\ 60,\ 129, \text{ ꝛc.}$$

woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer geben werden,

$$x = \frac{0}{0},\ \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{6}{3},\ \frac{13}{6},\ \frac{28}{13},\ \frac{60}{28},\ \frac{129}{60}, \text{ ꝛc.}$$

wovon die ersten gräulich fehlen, dieser aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ in der Gleichung giebt $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$ wo der Fehler $\frac{13}{343}$ ist.

235.

Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß nicht alle Gleichungen so beschaffen sind, daß man darauf diese Methode anwenden könne; insonderheit wo das zweyte Glied fehlt, kann dieselbe nicht gebraucht werden. Denn es sey z. E. $xx = 2$ und man wollte setzen $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$ so würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$ oder $r = 2p$ das ist $r = 0q + 2p$, woraus diese Reihe Zahlen entstünde:

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 8,\ 16,\ 16,\ 32,\ 32, \text{ ꝛc.}$$

daraus nichts geschlossen werden kann, indem ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, entweder $x = 1$ oder $x = 2$ giebt. Es kann aber diesem geholfen werden, wenn man setzt $x = y - 1$: denn bekommt man $yy \pm 2y + 1 = 2$, und wenn man hier setzt $y = \frac{q}{p}$

und

und $yy = \frac{r}{p}$ so erhält man die schon oben gegebene Näherung.

236.

Eben so verhält es sich auch mit dieser Gleichung $x^3 = 2$, aus welcher eine solche Reihe Zahlen nicht gefunden wird, die uns den Werth von $\sqrt[3]{2}$ anzeigte. Man darf aber nur setzen $x = y - 1$ um diese Gleichung zu bekommen $y^3 - 3yy + 3y - 1 = 2$, oder $y^3 = 3yy - 3y + 3$. Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y = \frac{q}{p}$, $yy = \frac{r}{p}$ und $y^3 = \frac{s}{p}$; so wird seyn $s = 3r - 3q + 3p$; woraus man sieht, wie aus drey Gliedern das folgende zu bestimmen. Man nimmt also die drey ersten Glieder nach Belieben an: als z. E. 0, 0, 1, so bekommt man diese Reihe:

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, 2c.

wovon die zwey letzten Glieder geben $y = \frac{324}{144}$ und $x = \frac{5}{4}$, welcher Bruch auch der Cubicwurzel aus 2 ziemlich nahe kommt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$ dagegen ist $2 = \frac{128}{64}$.

237.

Bey dieser Methode ist noch ferner zu bemerken, daß wenn die Gleichung eine Rationalwurzel hat, und der Anfang der Reihe also angenommen wird, daß daraus diese Wurzel heraus komme, so wird auch ein jegliches Glied derselben, durch das vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, so sey diese Gleichung gegeben $xx = x + 2$, worinn eine Wurzel ist $x = 2$; da

man nun für die Reihe diese Formel hat $r = q + 2p$, wenn man den Anfang setzt 1, 2, so erhält man diese Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ꝛc. welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner = 2.

Eben dieses erhellet auch aus dieser cubischen Gleichung $x^3 = xx + 3x + 9$, wovon eine Wurzel ist $x = 3$. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ diese Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ꝛc. welches wieder eine geometrische Progression ist, deren Nenner = 3.

238.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde: denn wenn die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten Wurzel, und die kleinere erhält man nicht anders, als wenn just der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein Exempel deutlich werden. Es sey die Gleichung $xx = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln sind $x = 1$ und $x = 3$. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$ und setzt man für den Anfang derselben 1, 1, nämlich für die kleinere Wurzel, so wird die ganze Reihe 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ꝛc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worinn die größere Wurzel enthalten, so wird die Reihe:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ꝛc. wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, wie man will, nur daß darinn die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie aus folgenden Reihen zu sehen:

der

der Anfang sey 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, ꝛc.
ferner 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, ꝛc.
ferner 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, ꝛc.
ferner 2, 1, −2, −11, −38, −118, −362, −1091, −3278, ꝛc.

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt immer der größern Wurzel 3 näher kommen, niemals aber der kleinern.

239.

Diese Methode kann auch so gar auf Gleichungen, die in das unendliche fortlaufen, angewendet werden, zum Exempel diene diese Gleichung

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{ꝛc.}$$

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen seyn muß, daß eine jede gleich sey der Summe aller vorhergehenden, woraus diese Reihe entsteht

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ꝛc.

woraus man sieht, daß die größte Wurzel dieser Gleichung sey $x = 2$, ganz genau; welches auch auf diese Art gezeigt werden kann. Man theile die Gleichung durch x^{∞}, so bekommt man

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ ꝛc. welches eine geometrische Progression ist, davon die Summe gefunden wird $= \frac{1}{x-1}$ also daß $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicire mit $x - 1$, so wird $x - 1 = 1$ und $x = 2$.

240.

Außer diesen zwey Methoden die Wurzel der Gleichung durch Näherung zu finden, trifft man hin und wieder noch andere an, welche aber entweder zu mühsam, oder nicht allgemein sind. Vor allen aber verdienet die hier zuerst erklärte Methode den Vorzug, als welche auf alle Arten von Gleichungen mit erwünschtem Erfolg kann angewendet werden, dahingegen die andere öfters eine gewisse Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieselbe nicht einmal gebraucht werden kann, wie wir hier bey verschiedenen Exempeln dargethan haben.

Ende des ersten Abschnitts von den Algebraischen Gleichungen, und derselben Auflösung.



Des

Des
Zweyten Theils
Zweyter Abschnitt.
Von
der unbestimmten Analytic.



Des

Zweyten Theils
~~Erster~~ II Abschnitt.
Von der unbestimmten Analytic.

Capitel I.
Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt.

1.

Aus dem obigen ist zu ersehen, wie eine unbekannte Zahl durch eine Gleichung: zwey unbekannte Zahlen aber durch zwey Gleichungen; 3 durch 3; 4 durch 4 und so fort bestimmt werden können; also daß allezeit eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, wenn anders die Frage selbst bestimmt ist.

Wenn aber weniger Gleichungen aus der Frage gezogen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und werden unserer Willkühr überlassen; daher solche Fra-

gen unbestimmt genennt werden, und welche einen eigenen Theil der Analytic ausmachen, so die unbestimmte Analytic genennt zu werden pflegt.

2.

Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekannte Zahlen nach unserm Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt. Allein es wird gemeiniglich diese Bedingung hinzu gefügt, daß die gesuchten Zahlen, ganze und so gar positiv, oder zum wenigsten Rationalzahlen seyn sollen; wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, also daß öfters nur etliche wenige öfters zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Platz finden, bisweilen auch so gar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytic öfters ganz besondere Kunstgriffe erfordert, und nicht wenig dienet den Verstand der Anfänger aufzuklären, und denselben eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Fragen den Anfang machen, und zwey Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll, wobey es sich versteht, daß diese Zahlen ganz Positiv seyn sollen.

Dieselben Zahlen seyn nun x und y, also daß seyn soll $x + y = 10$, woraus gefunden wird $x = 10 - y$, also daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine ganze und positive Zahl seyn soll; man könnte daher für y alle ganze Zahlen, von 1 bis ins unendliche annehmen, da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonst x negativ seyn würde; und wenn auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonst

sonst $x = 0$ würde; woher nur die folgenden Auflösungen Platz haben:

wenn $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
so wird $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, daher in allen nur fünf verschiedene Auflösungen statt finden.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen beyden Zahlen noch in zwey Theile zertheilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4.

Da dieses gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir zu etwas schwereren Fragen fortschreiten.

I. Frage: Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2 der andere aber durch 3 theilen lasse?

Es sey der erste Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x + 3y = 25$. Also $2x = 25 - 3y$. Man theile durch 2 so kommt $x = \frac{25 - 3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 und daher y nicht größer als 8. Man ziehe so viel ganze daraus als möglich, das ist man theile den Zehler $25 - 3y$ durch den Nenner 2, so wird $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$; also muß sich $1 - y$ oder auch $y - 1$ durch 2 theilen lassen. Man setze daher $y - 1 = 2z$ und also $y = 2z + 1$, so wird $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$; weil nun y nicht größer seyn kann als 8, so können auch für z keine andere Zahlen angenommen werden als solche, die $2z + 1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn als

als 4, daher z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man $z = 0$,	$z = 1$,	$z = 2$,	$z = 3$.
so wird $y = 1$,	$y = 3$,	$y = 5$,	$y = 7$.
und $x = 11$,	$x = 8$,	$x = 5$,	$x = 2$.

daher die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden: I.) $22 + 3$, II.) $16 + 9$, III.) $10 + 15$, IV.) $4 + 21$.

5.

II. Frage: Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen lasse?

Der erste Theil sey demnach $7x$ der andere aber $11y$, so muß seyn $7x + 11y = 100$; daher $x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7}$, also wird $x = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7}$; also muß $2 - 4y$ oder $4y - 2$ sich durch 7 theilen lassen. Läßt sich aber $4y - 2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y - 1$ durch 7 theilen lassen, man setze daher $2y - 1 = 7z$, oder $2y = 7z + 1$, so wird $x = 14 - y - 2z$; da aber seyn muß $2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$, so hat man $y = 3z + \frac{z + 1}{2}$. Nun setze man $z + 1 = 2u$ oder $z = 2u - 1$, so wird $y = 3z + u$. Folglich kann man für u eine jede ganze Zahl nehmen, daraus weder x noch y negativ wird, und alsdenn bekommt man:

$y = 7u - 3$ und $x = 19 - 11u$.

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer seyn als 3, nach der andern aber muß $11u$ kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmal 2 seyn kann, da nun u unmöglich nicht 0 seyn kann, so bleibt nur ein

ein einiger Werth übrig nämlich $u = 1$, daraus bekommen wir $x = 8$ und $y = 4$; daher die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I. 56 und II. 44.

6.

III. Frage: Man theile 100 in zwey solche Theile, wenn man den ersten theilt durch 5, daß 2 übrig bleiben, und wenn man den zweyten theilt durch 7 daß 4 übrig bleiben?

Da der erste Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt so setze man denselben $5x + 2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y + 4$; also wird $5x + 7y + 6 = 100$ oder $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$, hieraus $x = 18 - y - \frac{2y+4}{5}$; also muß $4 - 2y$, oder $2y - 4$, oder auch die Hälfte davon $y - 2$ durch 5 theilbar seyn. Man setze daher $y - 2 = 5z$ oder $y = 5z + 2$, so wird $x = 16 - 7z$; woraus erhellet daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen.

I. $z = 0$, giebt $x = 16$, und $y = 2$; woraus die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82 + 18$.

II. $z = 1$, giebt $x = 9$, und $y = 7$; woraus die beyden Theile seyn werden $47 + 53$.

III. $z = 2$, giebt $x = 2$, und $y = 12$; woraus die beyden Theile sind $12 + 88$.

7.

IV. Frage: Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht; wenn ich die meinigen je zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig, die andere spricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle so bleiben mir auch 7 übrig; wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Zahl der ersten durch 8 dividirt 7 übrig läßt, die Zahl der andern aber durch 10 dividirt auch

7 übrig

7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x+7$, der andern aber $10y+7$, also daß $8x+10y+14=100$, oder $8x=86-10y$, oder $4x=43-5y=40+3-4y-y$; daher setze man $y-3=4z$ so wird $y=4z+3$ und $x=10-4z-3-z=7-5z$, folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwey Auflösungen entspringen:

I. $z=0$, giebt $x=7$, und $y=3$: daher die erste Bäuerinn gehabt hat 63 Eyer, die andere aber 37.

II. $z=1$, giebt $x=2$, und $y=7$; daher die erste Bäuerinn gehabt hat 23 Eyer die andere aber 77.

8.

V. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen verzehrt 1000 Copeken. Ein Mann hat bezahlt 19 Cop. eine Frau aber 13 Cop., wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Männer sey $=x$ der Weiber aber $=y$, so bekommt man diese Gleichung $19x+13y=1000$. Daraus wird $13y=1000-19x$ oder $13y=988+12-13x-6x$, also wird $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; also muß sich $12-6x$ oder $6x-12$, und auch der sechste Theil davon $x-2$ durch 13 theilen lasse. Man setze also $x-2=13z$, so wird $x=13z+2$ und $y=76-13z-2-6z$ oder $y=74-19z$; also muß z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, daher folgende vier Auflösungen Platz finden:

I.) $z=0$, giebt $x=2$ und $y=74$. Also waren 2 Männer und 74 Weiber; jene haben bezahlt 38 Cop. diese aber 962 Cop.

II. $z=1$, giebt die Zahl der Männer $x=15$ und die Zahl der Weiber $y=55$; jene haben verzehrt 285 Cop. diese aber 715 Cop.

III.)

III.) $z=2$, giebt die Zahl der Männer $x=28$ und die Zahl der Weiber $y=36$; jene haben verzehrt 532 Cop. diese aber 468 Cop.

IV. $z=3$, giebt die Zahl der Männer $x=41$, und die Zahl der Weiber $y=17$; jene haben verzehrt 779 Cop. diese aber 221 Cop.

9.

VI.) Frage: Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthl. Zahlt für ein Pferd 31 Rthl., für einen Ochsen aber 21 Rthl., wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die Zahl der Pferde sey $=x$ der Ochsen aber $=y$, so muß seyn: $31x+21y=1770$ oder $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, und also $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$; daher muß $10x-6$ und also auch die Hälfte $5x-3$ durch 21 theilbar seyn: man setze also $5x-3=21z$, daher $5x=21z+3$ also daß $y=84-x-2z$.

Da nun $x=\frac{21z+3}{5}$ oder $x=4z+\frac{z+3}{5}$, so setze man $z+3=5u$, so wird $z=5u-3$, $x=21u-12$ und $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$; daher u größer seyn muß als 0 und doch kleiner als 4, woraus wir diese drey Auflösungen erhalten:

I.) $u=1$ giebt die Zahl der Pferde $x=9$ und der Ochsen $y=71$; jene haben gekost 279 Rthl. diese aber 1491, zusammen 1770 Rthl.

II.) $u=2$ giebt die Zahl der Pferde $x=30$ und der Ochsen $y=40$; jene haben gekost 930 Rthl. diese aber 840, zusammen 1770 Rthl.

III.) $u=3$ giebt die Zahl der Pferde $x=51$ und der Ochsen $y=9$; jene haben gekost 1581 Rthl. diese aber 189 Rthl. zusammen 1770 Rthl.

10.

Die bisherigen Fragen leiten auf eine solche Gleichung $ax + by = c$, wo a, b, und c ganze und positive Zahlen bedeuten, und für x und y auch ganze und positive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ ist, und die Gleichung eine solche Form erhält $ax = by + c$, so sind die Fragen von einer ganz andern Art, und lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Capitel erkläret werden soll. Die leichtesten Fragen von dieser Art sind dergleichen. Wenn man z. E. zwey Zahlen sucht, deren Differenz seyn soll 6: so setze man die kleinere $= x$ die größere $= y$, und da muß seyn $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$. Hier hindert nun nicht, daß nicht vor x alle mögliche ganze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer vor eine nimmt, so wird y allezeit um 6 größer. Nehme man z. E. $x = 100$ so wäre $y = 106$; woraus ganz klar ist, daß unendlich viel Auflösungen statt finden.

11.

Hernach folgen die Fragen, wo $c = 0$ und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nämlich eine Zahl, die sich sowohl durch 5 als auch durch 7 theilen lasse, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich seyn $N = 5x$, weil die Zahl N durch 5 theilbar seyn soll; hernach muß auch seyn $N = 7y$, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen lassen: daher bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich y dadurch theilen lassen. Man setze demnach $y = 5z$, so wird $x = 7z$, daher die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede ganze Zahl annehmen kann, also daß

für

für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 910, ꝛc.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch über dieses durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch seyn $N = 9u$ also $35z = 9u$ und daraus $u = \frac{35z}{9}$: woraus klar ist, daß sich z durch 9 muß theilen lassen. Es sey demnach $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

12.

Mehr Schwierigkeit hat es, wenn die Zahl c nicht ist, als wenn seyn soll $5x = 7y + 3$, welche Gleichung herauskommt, wenn eine solche Zahl N gefunden werden soll, welche sich erstlich durch 5 theilen lasse; wenn aber dieselbe durch 7 dividirt wird 3 übrig bleiben, denn alsdenn muß seyn $N = 5x$, hernach aber $N = 7y + 3$ und deswegen wird $5x = 7y + 3$ folglich $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Man setze $2y + 3 = 5z$, so wird $x = y + z$; da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$ oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$, so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze Zahlen können angenommen werden, auch so gar negative, wenn nur N positiv wird, welches hier geschiehet wenn $u = -1$, denn da wird $N = 10$; die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt, daher die gesuchten Zahlen sind 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, ꝛc.

13.

Die Auflösung solcher Fragen beruhet auf die Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürzer bald weitläuftiger: folgende Frage leidet eine kurze Auflösung.

VII. Frage: Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2 übrig lasse, durch 13 aber dividirt 3 übrig lasse?

Diese Zahl sey N, so muß erstlich seyn $N=6x+2$, hernach aber $N=13y+3$; also wird $6x+2=13y+3$ und $6x=13y+1$, daher $x=\frac{13y+1}{6}=2y+\frac{y+1}{6}$. Man setze also $y+1=6z$, so wird $y=6z-1$ und $x=2y+z=13z-2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N=78z-10$. Solche Zahlen sind demnach folgende 68, 146, 224, 302, 380, etc. welche nach einer arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz ist $78=6.13$. Wenn man also nur eine von diesen Zahlen weis, so lassen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur nöthig hat 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren, so lange es angeht.

14.

Ein Exempel, wo es schwerer wird, mag folgendes seyn:

VIII. Frage: Man suche eine Zahl N, welche durch 39 dividirt, 16 übrig lasse und durch 56 dividirt, 27 übrig lasse?

Erstlich muß also seyn $N=39p+16$ hernach aber $N=56q+27$; daher wird $39p+16=56q+27$, oder

oder $39p = 56q + 11$ und $p = \frac{56q+11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$; also daß $r = \frac{17q+11}{39}$: daher wird $39r = 17q + 11$ und $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$; also daß $s = \frac{5r-11}{17}$ oder $17s = 5r - 11$, daher wird $r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{2s+11}{5} = 3s + t$; also daß $t = \frac{2s+11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$, und so wird $s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u$; also daß $u = \frac{t-11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen, und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen

$t = 2u + 11$
$s = 2t + u = 5u + 22$
$r = 3s + t = 17u + 77$
$q = 2r + s = 39u + 176$
$p = q + r = 56u + 253$

und endlich $N = 39 . 56u + 9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$: setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9883$, oder $N = 2184x + 1147$. Diese Zahlen machen demnach eine arithmetische Progression, deren erstes Glied ist 1147 und die Differenz = 2184. Diese Zahlen sind demnach

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, rc.

15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Fragen beyfügen:

IX. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 25 Cop. ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesammt einen Cop. mehr verzehrt haben, als die Männer; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey gewesen $= p$, der Männer aber $= q$, so haben die Weiber verzehrt $16p$, die Männer aber $25q$; daher muß seyn $16p = 25q + 1$, und da wird $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$; also daß $r = \frac{9q+1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; daher wird $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, also daß $s = \frac{7r-1}{9}$ oder $9s = 7r - 1$; daher wird $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, also daß $t = \frac{2s+1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; daher wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{1} = 3t + u$, also daß $u = \frac{t-1}{2}$ oder $2u = t - 1$, daher $t = 2u + 1$.

Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$t = 2u + 1$
$s = 3t + u = 7u + 3$
$r = s + t = 9u + 4$
$q = r + s = 16u + 7$
$p = q + r = 25u + 11$,

daher war die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in ganzen Zahlen an-

neh-

nehmen kann, was man will. Die kleinere Zahlen sind demnach nebst den folgenden wie hier stehet.

Anzahl der Weiber: = 11, 36, 61, 86, 111, ꝛc.
der Männer: = 7, 23, 39, 55, 71, ꝛc.

Nach der ersten Auflösung in die kleinste Zahlen haben die Weiber verzehrt 176 Cop. die Männer aber 175; also die Weiber einen Cop. mehr als die Männer.

16.

X. Frage: Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 20 Rthl. und es findet sich, daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde: wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen $= p$, der Pferde aber $= q$, so muß $20p = 31q + 7$ daher $p = \frac{31q+7}{20}$ $= q + \frac{11q+7}{20} = q + r$, daher $20r = 11q + 7$, und $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{1} = r + s$; daher $11s = 9r - 7$ und $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$, daher $9t = 2s + 7$, und $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, daher $2u = t - 7$, und $t = 2u + 7$.

$s = 4t + u = 9u + 28$
$r = s + t = 11u + 35$
$q = r + s = 20u + 63$ Zahl der Pferde
$p = q + r = 31u + 98$ Zahl der Ochsen.

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wenn man setzt $u = -3$; die größe-

re steigen nach arithmetischen Progressionen wie folget.
Zahl der Ochsen p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253, ꝛc.
Zahl der Pferde q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, ꝛc.

17.

Wenn wir bey diesem Exempel erwegen, wie die Buchstaben p und q durch die folgende bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf der Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf derjenigen, nach welcher der größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:

20	31 / 20	1
11	20 / 11	1
9	11 / 9	1
2	9 / 8	4
1	2 / 2	2
	0	

Denn hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s, ꝛc. vorkommen, und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt allererst die Zahl 7 zum Vorschein, und zwar mit dem Zeichen plus, weil die letzte Bestimmung die fünfte

fünfte ist, wäre aber die Zahl derselben gerad gewesen, so hätte − 7 gesetzt werden müssen. Solches wird deutlicher erhellen aus der folgenden Tabelle, wo erstlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r, ꝛc. vorkommt.

$31 = 1.20 + 11$	$p = 1.q + r$
$20 = 1.11 + 9.$	$q = 1.r + s$
$11 = 1.9 + 2.$	$r = 1.s + t$
$9 = 4.2 + 1.$	$s = 4.t + u$
$2 = 2.1 + 0.$	$t = 2.u + 7$

18.

Auf diese Art kann auch das vorhergehende Exempel im 14ten §. vorgestellt werden, wie folget:

$56 = 1.39 + 17$	$p = 1.q + r$
$39 = 2.17 + 5$	$q = 2.r + s$
$17 = 3.5 + 2$	$r = 3.s + t$
$5 = 2.2 + 1$	$s = 2.t + u$
$2 = 2.1 + 0$	$t = 2.u + u$

19.

Solchergestalt sind wir im Stande alle dergleichen Exempel auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey nämlich gegeben diese Gleichung $bp = aq + n$, wo a, b und n bekannte Zahlen sind. Hier muß man nur eben die Operation anstellen, als wenn man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinen Theiler suchen wollte, aus welchen so gleich p, und q durch die folgende Buchstaben bestimmt werden, wie folget.

Es sey	$a = Ab + c$	so wird $p = Aq + r$
	$b = Bc + d$	$q = Br + s$
	$c = Cd + e$	$r = Cs + t$
	$d = De + f$	$s = Dt + u$
	$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
	$f = Fg + o$	$u = Fv \pm n$

Hier wird in der letzten Bestimmung $+ n$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerad ist, hingegen aber $- n$; wenn dieselbe Zahl gerade ist. Solchergestalt können nun alle dergleichen Fragen ziemlich geschwind aufgelöset werden, wovon wir einige Exempel geben wollen.

20.

XI. Frage: Es werde eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3 übrig lasse, durch 19 aber 5?

Diese Zahl sey N daher muß erstlich seyn $N = 11p + 3$ hernach auch $N = 19q + 5$, daher wird $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19p + 2$, woraus die folgende Tabelle verfertiget wird.

$19 = 1.11 + 8$	$p = q + r$
$11 = 1.8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2.3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1.2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2.1 + 0.$	$t = 2u + 2$

Wo man u nach Belieben annehmen kann, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie folget.

$t = 2u + 2$
$s = t + u = 3u + 2$
$r = 2s + t = 8u + 6$
$q = r + s = 11u + 8$
$p = q + r = 19u + 14$

Hier-

hieraus bekommt man die gesuchte Zahl $N = 209u + 157$, daher ist die kleinste Zahl für N, 157.

21.

XII. Frage: Man suche eine Zahl N, welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig lasse; wenn dieselbe aber durch 29 dividirt wird, daß 10 übrig bleiben?

Nach der letzten Bedingung muß seyn $N = 29p + 10$, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben seyn wie oben gefunden worden $N = 209u + 157$, wofür wir schreiben wollen $N = 209q + 157$, daher wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Operation angestellet wird

$$\begin{array}{rlrl} 209 = 7.\ 29 + 6; & \text{also} & p = & 7q + r \\ 29 = 4.\ 6 + 5; & & q = & 4r + s \\ 6 = 1.\ 5 + 1; & & r = & s + t \\ 5 = 5.\ 1 + 0; & & s = & 5t - 147 \end{array}$$

von wannen wir folgender Gestalt zurück gehen

$s = 5t - 147$

$r = s + t = 6t - 147$

$q = 4r + s = 29t - 735$

$p = 7q + r = 209t - 5292$

daher $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wenn man setzt $t = 26$, da wird $N = 4128$.

22.

Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß wenn eine solche Gleichung $bp = aq + n$ aufgelöst werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müssen, denn sonst wäre die Frage unmöglich, wenn nicht die Zahl n eben denselben gemeinen Theiler hätte.

 Denn

Denn wenn z. E. seyn sollte $9p = 15q + 2$, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich diese Frage aufzulösen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar ist und also niemals 2 werden kann, wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ rc. so wäre die Frage wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da denn herauskäme $3p = 5q + 1$, welche nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müssen, und daß die vorgegebene Regel in keinen andern Fällen Platz haben kann.

23.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Weg behandeln. Da wird nun $p = \frac{15q + 2}{9} = q + \frac{6q + 2}{9}$ $= q + r$, also daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; daher $q = \frac{9r - 2}{6} = r + \frac{3r - 2}{6} = r + s$, also daß $3r - 2$ $= 6s$ oder $3r = 6s + 2$; daher $r = \frac{6s + 2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$, welches offenbar niemals eine ganze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine ganze Zahl seyn muß, woraus offenbar zu ersehen, daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.



Capi-

Capitel 2.

Von der so genannten Regel-Coeci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt daß dafür ganze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechenbüchern vor, und pflegen nach der so genannten Regel-Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirthshause 50 Rthl. daran zahlt ein Mann 3 Rthl. ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgende Gleichungen, I.) $p + q + r = 30$. II.) $3p + 2q + r = 50$; aus welchen die drey Buchstaben p, q, und r in ganzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p + q$ kleiner seyn als 30: dieser Werth in der andern

für

für r geschrieben, giebt $2p + q + 30 = 50$, also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbst kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entspringen.

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$

der Weiber $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$

der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,$

läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

26.

II. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine Ziegen und Schafe, für 100 Rthl. kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthl. eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthl. ein Schaf $\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schafe $= r$, so hat man folgende zwey Gleichungen I.) $p + q + r = 100$, II.) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$; diese letztere multiplicirt man mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der andern gesetzt giebt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$; also muß $18p$ durch 5 theilbar seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also $p = 5s$, so wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden kann, doch so, daß q nicht negativ werde, daher s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also wenn 0 auch ausgeschlossen wird, nur folgende drey Auflösungen statt finden:

näm-

nämlich wenn $s = 1, 2, 3.$
so wird $p = 5, 10, 15.$
$q = 42, 24, 16.$
$r = 53, 66, 79.$

27.

Wenn man dergleichen Exempel selbst vorgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß dieselben möglich sind: um nun davon zu urtheilen, so ist folgendes zu bemerken:

Es seyn die beyden Gleichungen, dergleichen wir bisher gehabt, also vorgestellet I.) $x + y + z = a$, II.) $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h, nebst a und b gegebene Zahlen sind: nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste, da $x + y + z = a$, so wird $fx + fy + fz = fa$. Nun ist $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$, daher muß fa größer seyn als b, oder b muß kleiner seyn als fa; und da ferner $hx + hy + hz = ha$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner ist als $fx + gy + hz$, so muß auch ha kleiner seyn als b, oder b größer als ha. Wofern demnach die Zahl b nicht kleiner als fa und zugleich größer als ha, so ist die Frage immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt auch also vorgetragen zu werden, daß die Zahl b zwischen diesen Gränzen fa und ha enthalten seyn muß, ferner muß dieselbe auch nicht einem der beyden Gränzen gar zu nahe kommen, weil sonst die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In dem vorigen Exempel, wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{2}$ waren die Gränzen 350 und 50, wollte man nun setzen $b = 51$ anstatt 100, so wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$ und hier mit 6 multiplicirt $21x + 8y + 3z = 306$; man nehme die erste dreymal, so wird $3x + 3y + 3z = 300$, so von jener abgezogen läßt $18x + 5y = 6$, welche gleich

offen-

offenbar unmöglich ist, weil x und y ganze Zahlen seyn müssen.

28.

Diese Regel kommt auch den Münzmeistern und Goldschmieden wohl zu statten, wenn sie aus drey oder mehreren Sorten von Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalt zusammen schmelzen wollen; wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

III. Frage: Ein Münzmeister hat dreyerley Silber, das erste ist 14 löthig, das andere 11 löthig, das dritte 9 löthig. Nun soll er eine Masse 30 Mark schwer machen, welche 12 löthig seyn soll, wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweyten y M. und von der dritten z M. so muß seyn $x+y+z=30$, welches die erste Gleichung ist:

Da ferner ein Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Mark enthalten $14x$ Loth Silber; eben so werden die y Mark von der zweyten Sorte enthalten $11y$ Loth; und die z Mark von der dritten Sorte werden enthalten $9z$ Loth Silber; daher die ganze Masse an Silber enthalten wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Mark wiegt, wovon ein Mark 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darinnen seyn, nämlich 360 Loth; woraus diese zweyte Gleichung entspringt $14x + 11y + 9z = 360$, hiervon subtrahire man die erste 9 mal genommen, nämlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in ganzen Zahlen, alsdenn aber wird $z = 30 - x - y$; aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey demnach $x = 2u$, so wird $y = 45 - 5u$

und

und $z = 3u - 15$, also muß u grösser als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn, woraus folgende Auflösungen gezogen werden.

u =	5,	6,	7,	8,	9,
x =	10,	12,	14,	16,	18,
y =	20,	15,	10,	5,	0,
z =	0,	3,	6,	9,	12,

29.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekannte Zahlen vor, wo die Auflösung auf eben diese Art geschehen kann, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

IV. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh um 100 Rthl., 1 Ochsen für 10 Rthl., 1 Kuh für 5 Rthl., 1 Kalb für 2 Rthl., 1 Schaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sey $= p$, der Kühe $= q$, der Kälber $= r$ und der Schafe $= s$, so ist die erste Gleichung: $p + q + r + s = 100$, die zweyte Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, welche um die Brüche wegzubringen mit 2 multiplicirt giebt $20p + 10q + 4r + s = 200$, hievon subtrahire man die erste Gleichung so hat man, $19p + 9q + 3r = 100$; hieraus bekommen wir $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$, daher muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn. Man setze demnach

$p - 1 = 3t$ so wird:

$p = 3t + 1$

$q = q$

$r = 27 - 19t - 3q$

$s = 72 + 2q + 16t$

also

also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wenn nur diese Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwegen haben.

I. wenn $t = 0$,	II. wenn $t = 1$,	t, kann nicht 2 gesetzt werden weil sonsten r, negativ würde.
so wird $p = 1$, $q = q$, $r = 27 - 3q$, $s = 72 + 2q$	so wird $p = 4$, $q = q$, $r = 8 - 3q$, $s = 88 + 2q$	

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9 und im zweyten Fall muß q nicht größer seyn als 2. Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Falle erhalten wir diese 10 Auflösungen

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem 13 Auflösungen; wenn man aber 0 nicht wollte gelten lassen, so wären es nur 10 Auflösungen.

30.

30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wenn auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

V. Frage: Man suche drey ganze Zahlen, wenn die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 560; wenn aber die erste mit 9 die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 2920?

Es sey die erste Zahl $= x$ die zweyte $= y$, die dritte $= z$, so hat man diese zwey Gleichungen I.) $3x + 5y + 7z = 560$, II.) $9x + 25y + 49z = 2920$ von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen nämlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt $5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen lassen; daher setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder $3x = 35u - 60$ und $x = \frac{35u}{3} - 20$; deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung: $x = 35t - 20$, $y = 124 - 42t$, und $z = 15t$, wo man für t eine beliebige ganze Zahl setzen kann, doch so daß t größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

I.) wenn $t = 1$ so wird $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$

II.) wenn $t = 2$ wird $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$

Capitel 3.

Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt.

31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekannte Zahlen gesucht werden, und die eine nicht wie bisher allein steht, sondern entweder mit der andern multiplicirt oder in einer höhern Potestät vorkommt, wenn nur von der andern bloß die erste Potestät vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{ꝛc.} = 0$$

in welcher nur y vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann, die Bestimmung muß aber also geschehen, daß für x und y ganze Zahlen heraus kommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und von den leichtern den Anfang machen.

32.

I.) Frage: Man suche zwey Zahlen, wenn ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, das 79 heraus kommen?

Es seyn die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß seyn $xy + x + y = 79$, woraus wir bekommen $xy + y = 79 - x$ und $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$, woraus erhellet daß $x + 1$ ein Theiler seyn muß von 80:

da

da nun 80 viele Theiler hat so findet man aus einem jeden einen Werth für x; wie aus folgenden zu sehen:

die Theiler sind	1,	2,	4,	5,	8,	10,	16,	20,	40,	80,
daher wird $x =$	0,	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und $y =$	79,	39	19	15	9	7	4	3	1	0

weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern überein kommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

Solcher gestalt kann auch diese allgemeine Gleichung aufgelöst werden $xy + ax + by = c$ woraus kommt $xy + by = c - ax$ und also $y = \frac{c - ax}{x + b}$ oder $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$; daher muß $x + b$ ein Theiler seyn der bekannten Zahl $ab + c$ und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze daher es sey $ab + c = fg$ also daß $y = -a + \frac{fg}{x + b}$. Nun nehme man $x + b = f$ oder $x = f - b$, so wird $y = -a + g$ oder $y = g - a$; derohalben auf, so viel verschiedene Arten sich die Zahl $ab + c$ durch zwey Factores, als fg, vorstellen läßt, so erhält man daher nicht nur eine, sondern zwey Auflösungen: die erste ist nämlich $x = f - b$ und $y = g - a$, die andere aber kommt gleicher Gestalt heraus, wenn man $x + b = g$ setzt, da wird $x = g - b$ und $y = f - a$.

Sollte daher diese Gleichung vorgegeben seyn $xy + 2x + 3y = 42$ so wäre $a = 2$, $b = 3$, und $c = 42$ folglich $y = -2 + \frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factores als fg vorgestellt werden, da denn immer seyn wird $x = f - 3$ und $y = g - 2$; oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$. Dergleichen Factores sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factores	1. 48		2. 24		3. 16		4. 12		6. 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	-2	46	-1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung also vorgestellet werden: $mxy = ax + by + c$, wo a, b, c, und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber ganze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y so bekommt man $y = \frac{ax+c}{mx-b}$, damit hier x aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man beyderseits mit m, so hat man $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekannte Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß, man stelle daher den Zähler durch zwey Factores als fg vor, welches öfters auf vielerley Art geschehen kann, und sehe ob sich einer davon mit $mx - b$ vergleichen lasse, also daß $mx - b = f$: hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$,

daß

daß $f+b$ sich durch m theilen lasse, daher hier nur solche Factores von $mc+ab$ gebraucht werden können, welche, wenn dazu b addirt wird, sich durch m theilen lassen, welches durch ein Exempel erläutert werden soll:

Es sey demnach $5xy=2x+3y+18$. Hieraus bekommt man $y=\frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y=\frac{10x+90}{5x-3}=2+\frac{96}{5x-3}$, hier müssen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß wenn zu denselben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96 welche sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet daß nur diese, nämlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sey demnach I.) $5x-3=2$, so wird $5y=50$
und daher $x=1$, und $y=10$
II.) $5x-3=12$, so wird $5y=10$
und daher $x=3$, und $y=2$
III.) $5x-3=32$, so wird $5y=5$
und daher $x=7$, und $y=1$

35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung wird $my-a=\frac{mc+ab}{mx-b}$, so ist dienlich diese Anmerkung zu machen, daß wenn eine in dieser Form $mc+ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in dieser Form $mx-b$ enthalten ist, alsdenn der Quotient nothwendig diese Form $my-a$ haben müsse, und daß alsdenn die Zahl $mc+ab$ durch ein solches Product, $(mx-b)(my-a)$ vorgestellt werden könne: Es sey z. E. $m=12$, $a=5$, $b=7$ und $c=15$; so bekommt man

$12y - 5 = \frac{215}{12x - 7}$; nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müssen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wenn man 7 darzu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen lasse, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten wird $x = 1$ so findet man auch aus der andern y in ganzen Zahlen, nämlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdienet deswegen wohl bemerket zu werden.

36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser Art betrachten $xy + xx = 2x + 3y + 29$. Hieraus findet man nun $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$ oder $y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}$; also muß $x - 3$ ein Theiler seyn von der Zahl 26, und alsdenn wird der Quotient $= y + x + 1$. Da nun die Theiler von 26 sind 1, 2, 13, 26 so erhalten wir diese Auflösungen:

I. $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$

II. $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, also $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$

III. $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$

welcher negative Werth wegzulassen ist, und deswegen auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden muß.

37.

Mehr Formeln von dieser Art wo nur die erste Potestät von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind

sind nicht nöthig allhier zu berechnen, weil dergleichen Fälle sich nur selten ereignen, und alsdenn auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Potestät ansteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kommt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potestät befindlich ist, und alsdenn kommt es darauf an solche Werthe für x aussindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierinn bestehet die größte Kunst der unbestimmten Analytic, wie dergleichen Irrationalformeln zur Rationalität gebracht werden sollen, wozu wir die Anleitung in den folgenden Capiteln geben wollen.

Capitel 4.

Von der Art diese irrationale Formeln $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ rational zu machen.

38.

Hier ist also die Frage was für Werthe für x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a+bx+cxx$ ein wirkliches Quadrat werde, und also die Quadratwurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruhet hauptsächlich die Bestimmung der unbekannten Zahl x, wobey zum voraus zu bemerken, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich werde:

wenn aber dieselbe möglich ist, so muß man sich zum wenigsten anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x bloß mit rational Werthen begnügen, und nicht fordern, daß dieselben so gar ganze Zahlen seyn sollen, als welches eine ganz besondere Untersuchung erfordert.

39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potestät von x steige, indem höhere Potestäten besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte hier nicht einmal die zweyte Potestät vorkommen, und c = 0 seyn, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: denn wenn diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a+bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur setzen $a+bx=yy$, woraus man so gleich erhielte $x=\frac{yy-a}{b}$; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a+bx$ ein Quadrat und folglich $\sqrt{(a+bx)}$ rational heraus käme.

40.

Wir wollen demnach bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1+xx)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß wenn zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine ganze Quadratzahl nur um 1 größer ist als die vorhergehende, daher man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

41.

Weil $1 + xx$ ein Quadrat seyn soll, und man setzen wollte $1 + xx = yy$, so würde $xx = yy - 1$ und $x = \sqrt{(yy - 1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre Quadrate weniger 1 wiederum Quadrate würden, welche Frage eben so schwer ist als die vorige und würde also hierdurch nichts gewonnen.

Daß es aber wirklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1 + xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I. wenn $x = \frac{3}{4}$ so wird $1 + xx = \frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{5}{4}$.

II. Eben dieses geschieht wenn $x = \frac{4}{3}$ wo $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{5}{3}$ heraus kommt.

III. Hernach wenn man setzt $x = \frac{5}{12}$ so erhält man $1 + xx = \frac{169}{144}$, wovon die Quadratwurzel ist $\frac{13}{12}$.

Wie nunmehr dergleichen Zahlen und sogar alle mögliche gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

42.

Solches kann auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1 + xx)} = x + p$ so wird $1 + xx = xx + 2px + pp$, wo sich das Quadrat xx aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Denn in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beyderseits xx so wird $2px + pp = 1$, woraus gefunden wird $x = \frac{1 - pp}{2p}$ wo man für p eine jede Zahl annehmen kann, und auch sogar dafür Brüche gesetzt werden können.

Man setze daher $p = \frac{m}{n}$, so wird $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$: diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, so bekommt man $x = \frac{nn - mm}{2mn}$.

43.

Damit also $1 + xx$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche ganze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, so wird $1 + xx = 1 + \frac{n^4 - 2nnmm + m^4}{4mmnn}$ oder $1 + xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn}$ welcher Bruch wirklich ein Quadrat ist, und daraus gefunden wird $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{nn + mm}{2mn}$.

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemerket werden,

wenn n=2,	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5,
und m=1,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	3,	4,
so wird $x = \frac{3}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{15}{8}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$,

44.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1 + \frac{(nn - mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird $(2mn)^2 + (nn - mm)^2 = (nn + mm)^2$; wir haben also auf eine

eine allgemeine Art zwey Quadraten, deren Summe wieder ein Quadrat ist, hierdurch wird nun diese Frage aufgelöst.

Zwey Quadratzahlen zu finden; deren Summe wieder eine Quadratzahl sey?

Also soll $pp+qq=rr$ seyn: zu diesem Ende darf man nur setzen $p=2mn$ und $q=nn-mm$, so wird $r=nn+mm$; da hernach ferner $(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2$, so können wir auch diese Frage auflösen.

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadratzahl sey? also, daß $pp-qq=rr$; denn da darf man nur setzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, so wird $r=nn-mm$.

Oder man kann auch setzen $p=nn+mm$ und $q=nn-mm$, so wird alsdenn $r=2mn$.

45.

Wir haben aber zweyerley Arten versprochen, um die Formel $1+xx$ zu einem Quadrat zu machen; die andere Art verhält sich nun folgender Gestalt:

Man setze $\sqrt{(1+xx)}=1+\frac{mx}{n}$; daher bekommt man $1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; subtrahirt man hier beyderseits 1, so wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt, und folglich giebt $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt, $nnx=2mn+mmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{2mn}{nn-mm}$: denn

setzt

setzt man diesen Werth für x, so wird $1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4}$ oder $= \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4}$, welcher Bruch das Quadrat ist von $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Da man nun daher diese Gleichung bekommt $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$ so fließt daraus, wie oben $(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2$, welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand, um die allgemeine Formel $a + bx + cxx$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; der andere aber, wo a ein Quadrat ist; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey demnach erstlich c eine Quadratzahl oder die gegebene Formel sey $a + bx + ffxx$, welche ein Quadrat werden soll, zu diesem Ende setze man $\sqrt{(a + bx + ffxx)} = fx + \frac{m}{n}$, so wird $a + bx + ffxx = ffxx + \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, wo sich die xx beyderseits aufheben, also, daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, welche mit nn multiplicirt, $nna + nnbx = 2mnfx + mm$ giebt; woraus gefunden wird $x = \frac{mm - nna}{nnb - 2mnf}$, wird nun dieser Werth für x geschrie-

ben,

ben, so wird $\sqrt{}(a+bx+ffxx) = \frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf} + \frac{m}{n}$
$= \frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$.

47.

Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man sogleich $x = \frac{p}{q}$, also, daß $p = mm - nna$, und $q = nnb - 2mnf$, und alsdenn wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat, wenn sie mit dem Quadrat qq multiplicirt wird, daher auch diese Formel $aqq + bpq + ffpp$ ein Quadrat wird, wenn man setzt $p = mm - nna$ und $q = nnb - 2mnf$, woraus unendlich viel Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48.

II. Der zweyte Fall findet statt, wenn der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey demnach diese Formel gegeben $ff + bx + cxx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{}(ff + bx + cxx) = f + \frac{mx}{n}$, so wird $ff + bx + cxx$ $= ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, wo sich die ff aufheben, und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen lassen, also, daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, oder $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, und folglich

lich $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$; setzt man nun diesen Werth für x, so wird $\sqrt{(ff + bx + cxx)} = f + \frac{2mmf - mnb}{nnc - mm}$ $= \frac{nncf + mmf - mnb}{nnc - mm}$: setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann, wie oben, folgende Formel zu einem Quadrat gemacht werden, $ffqq + bpq + cpp$, als welches geschiehet, wenn man setzt $p = 2mnf - nnb$ und $q = nnc - mm$.

49.

Hier ist besonders der Fall merkwürdig, wenn $a = 0$, oder wenn diese Formel $bx + cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden soll; denn da darf man nur setzen $\sqrt{(bx + cxx)} = \frac{mx}{n}$, so wird $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, wo durch x dividirt und mit nn multiplicirt heraus kommt, $bnn + cnnx = mmx$, folglich $x = \frac{nnb}{mm - cnn}$.

Man suche z. E. alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind, so muß $\frac{xx + x}{2}$, und also auch $2xx + 2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{mmxx}{nn}$, so wird $2nnx + 2nn = mmx$ und $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$; wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, alsdenn aber wird mehrentheils für x ein Bruch gefunden; doch können auch ganze Zahlen heraus kommen, als wenn man setzt $m = 3$ und $n = 2$, so bekommt man $x = 8$, wovon das Dreyeck ist 36, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch setzen $m = 7$ und $n = 5$, so wird $x = -50$, wovon das Dreyeck ist 1225, welches zugleich das Dreyeck ist von $+49$, und auch das Quadrat von 35; dieses wäre auch heraus gekommen, wenn man gesetzt hätte $n = 7$, und $m = 10$, denn da wird $x = 49$.

Eben so kann man setzen $m = 17$ und $n = 12$, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2}$ $= 144 \cdot 289$, welches eine Quadratzahl ist, deren Wurzel $= 12 \cdot 17 = 204$.

50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwägen, daß die Formel $bx + cxx$ aus diesem Grund zum Quadrat gemacht worden, weil dieselbe einen Factor hatte, nämlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden statt, wenn sich $a + bx + cxx$ in zwey Factores vertheilen läßt, welches geschiehet, wenn $bb - 4ac$ ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen, so ist zu merken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cxx = 0$, so wird $cxx = -bx - a$ und $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$ woraus gefunden wird $x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)}$, oder $x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(bb - 4ac)}}{2c}$, woraus erhellet, daß, wenn $bb - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzel rational angegeben werden können;

Es

Es sey demnach $bb-4ac=dd$, so sind die Wurzeln $\frac{-b\pm d}{2c}$, oder es ist $x=\frac{-b\pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a+bx+cxx$ die Divisores seyn $x+\frac{b-d}{2c}$ und $x+\frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt, dieselbe Formel nur durch c dividirt, hervor bringen, man findet nämlich $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{dd}{4cc}$, da nun $dd=bb-4ac$, so hat man $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{bb}{4cc}+\frac{4ac}{4cc}=xx+\frac{bx}{c}+\frac{a}{c}$, welche mit c multiplicirt, giebt $cxx+bx+a$. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel diesem Product gleich seyn:

$$\left(cx+\frac{b}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(x+\frac{b}{2c}+\frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer statt findet, so oft $bb-4ac$ ein Quadrat ist.

51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzu fügen wollen.

III. Dieser Fall ereignet sich nun, wenn unsere Formel durch ein solches Product vorgestellet werden kann $(f+gx).(h+kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon:

$\sqrt{(f+gx).(h+kx)}=\frac{m.(f+gx)}{n}$, so bekommt man $(f+gx)\,(h+kx)=\frac{mm.(f+gx)^2}{nn}$, welche Glei-

chung

chung durch $f+gx$ dividirt, giebt $h+kx=\frac{mm.(f+gx)}{nn}$, das ist, $hnn+knnx=fmm+gmmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Frage vorgegeben:

I. Frage: Man suche die Zahlen x, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey?

Da nun seyn muß $2xx-2$ ein Quadrat, so ist zu erwägen, daß sich diese Formel durch folgende Factores vorstellen läßt $2.(x+1)(x-1)$: man setze also die Wurzel davon $\frac{m.(x+1)}{n}$, so wird $2.(x+1)(x-1) = \frac{mm.(x+1)^2}{nn}$; man dividire durch $x+1$, und multiplicire mit nn, so bekommt man $2nnx-2nn=mmx+mm$ und daher $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so wird $x=3$, und $2xx-2=16=4^2$.

Nimmt man $m=3$ und $n=2$, so wird $x=-17$: da aber nur das Quadrat von x vorkommt, so ist es gleich viel, ob man nimmt $x=-17$ oder $x=+17$, aus beyden wird $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Frage: Es sey diese Formel gegeben $6+13x+6xx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Hier ist nun $a=6$, $b=13$ und $c=6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also, ob $bb-4ac$ ein Quadrat werde; da nun kommt 25; so weiß man, daß diese Formel durch zwey Factores vorgestellt werden kann, welche sind $(2+3x).(3+2x)$; davon sey nun die Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, so bekommt man $(2+3x).(3+2x)=\frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, daraus wird $3nn+2nnx=2mm+3mmx$, und daher wird $x=\frac{2mm-3nn}{2nn-3mm}=\frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß $3nn$ größer seyn als $2mm$, und also $2mm$ kleiner als $3nn$; folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber der Nenner positiv werde, so muß $3mm$ größer seyn als $2nn$, und also $\frac{mm}{nn}$ größer seyn als $\frac{2}{3}$. Um daher für x positive Zahlen zu finden, so müssen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner sey als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$.

Setzt man nun $m=6$ und $n=5$, so wird $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$, welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$, und offenbar größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x=\frac{3}{58}$.

54.

IV. Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Platz findet, wenn die Formel $a+bx+cxx$ dergestalt in zwey Theile zertheilt werden kann,

daß

daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factores auflösen lasse, also, daß eine solche Form heraus komme $pp + qr$, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f + gx$ bedeuten. Denn da darf man nur setzen $\sqrt{(pp + qr)} = p + \frac{mq}{n}$, so wird $pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mmqq}{nn}$, wo sich die pp aufheben, und die übrigen Glieder durch q theilen lassen, also, daß $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mmq}{nn}$ oder $nnr = 2mnp + mmq$, woraus sich leicht bestimmen läßt, und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Exempel erläutern wollen.

55.

III. Frage: Man suche solche Zahlen x, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein anderes Quadrat? oder wenn man davon 1 subtrahirt, ein Quadrat übrig bleibe? wie bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen ist 50, wovon 1 subtrahirt, das Quadrat 49 übrig bleibt.

Also muß $2xx - 1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a = -1$, $b = 0$, und $c = 2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist, auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factores auflösen, weil $bb - 4ac = 8$ kein Quadrat ist, und daher keiner von den drey ersten Fällen, statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel also vorgestellt werden $xx + (xx - 1) = xx + (x - 1)(x + 1)$. Hiervon werde nun die Wurzel gesetzt $x + \frac{m(x + 1)}{n}$,

 daher

daher wird $xx + (x+1).(x-1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, wo sich die xx aufheben, und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen lassen, da denn kommt $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$ und $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; und weil in unserer Formel $2xx-1$ nur das Quadrat xx vorkommt, so ist es gleich viel, ob die Werthe von x positiv oder negativ heraus kommen. Man kann auch sogleich $-m$ anstatt $+m$ schreiben, damit man bekomme $x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so hat man $x=1$ und $2xx-1=1$. Es sey ferner $m=1$ und $n=2$, so wird $x=\frac{5}{7}$ und $2xx-1=\frac{1}{49}$. Setzt man aber $m=1$ und $n=-2$, so wird $x=-5$, oder $x=+5$ und $2xx-1=49$.

56.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wenn dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache? dergleichen ist 7, wovon das Quadrat doppelt genommen ist 98, und 2 addirt, kommt das Quadrat 100?

Es muß also diese Formel $2xx+2$ ein Quadrat seyn, wo $a=2$, $b=0$ und $c=2$, also wieder weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $bb-4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann die dritte Regel hier nicht statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel also vorstellen:

Man setze den ersten Theil $=4$, so wird der andere seyn $2xx-2 = 2(x+1).(x-1)$, und daher unsere

sere Formel $4 + 2(x+1).(x-1)$. Davon sey die Wurzel $2 + \frac{m.(x+1)}{n}$, woher diese Gleichung entspringt,

$$4 + 2(x+1).(x-1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn},$$

wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder sich aber durch $x+1$ theilen lassen, also, daß $2nnx - 2nn = 4mn + mmx + mm$, und daher $x = \frac{4mn + mm + 2nn}{2nn - mm}$. Setzt man $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 7$, und $2xx + 2 = 100$.

Nimmt man $m = 0$ und $n = 1$, so wird $x = 1$, und $2xx + 2 = 4$.

57.

Oefters geschiehet es auch, daß, wenn weder die erste, noch zweyte, noch dritte Regel Platz findet, man nicht finden kann, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Als wenn diese Formel vorkäme $7 + 15x + 13xx$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fällt aber nicht so leicht in die Augen. Denn der erste Theil ist $(1-x)^2$, oder $1 - 2x + xx$, und daher wird der andere seyn $6 + 17x + 12xx$, welcher deswegen Factoren hat, weil $17^2 - 4.6.12 = 1$, und also ein Quadrat ist. Die zwey Factores davon sind auch wirklich $(2+3x).(3+4x)$; also, daß diese Formel seyn wird $(1-x)^2 + (2+3x)(3+4x)$, welche jetzo nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Es ist aber nicht wohl zu fordern, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; Daher wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erstlich zu erkennen, ob es möglich sey, eine solche Formel aufzulösen?

 weil

weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx + 2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einigen Fall möglich, so ist es leicht, alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch allhier erörtern wollen.

58.

Der ganze Vortheil, welcher in solchen Fällen zu statten kommen kann, bestehet darinn, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat wird? indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen, ob in keinem Fall ein Quadrat heraus komme?

Um diese Arbeit zu erläutern, wenn etwann eine gebrochene Zahl für x gesetzt, dieses leisten sollte, kann man sogleich für x einen Bruch als $\frac{t}{u}$ schreiben, woraus diese Formel erwächst $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, welche, wenn sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat uu multiplicirt, ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig zu probiren, ob man für t und u solche Werthe in ganzen Zahlen errathen kann, daß diese Formel $auu + btu + ctt$ ein Quadrat werde? denn alsdenn, wenn man setzt $x = \frac{t}{u}$, so wird auch diese Formel $a + bx + cxx$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber, aller Mühe ungeachtet, keinen solchen Fall finden, so hat man großen Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich sey, die Formel

mel zu einem Quadrat zu machen, als dergleichen es unendlich viele giebt.

59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es ganz leicht, alle mögliche Fälle zu finden, darinn dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß. Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich diese Formel betrachten $2+7xx$, wo $a=2$, $b=0$, und $c=7$: dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wenn $x=1$; daher setze man $x=1+y$, so wird $xx=1+2y+yy$, und unsere Formel wird seyn $9+14y+7yy$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist: also setzen wir nach der zweyten Regel die Quadratwurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, da bekommen wir diese Gleichung $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmy}{nn}$, wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen lassen; da bekommen wir $14nn+7nny=6mn+mmy$, und daher $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; daraus finden wir $x=\frac{6mn-7nn-mm}{7nn-mm}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{1}{3}$, oder auch, weil nur xx vorkommt, $x=+\frac{1}{3}$, daher wird $2+7xx=\frac{25}{9}$.

Man setze ferner $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-1$, oder $x=+1$.

Setzt man aber $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=17$; daraus wird $2+7xx=2025$, welches das Quadrat ist von 45.

Laßt uns auch setzen $m=8$ und $n=3$, so wird $x=-17$ wie zuvor.

Setzen wir aber $m=8$ und $n=-3$, so wird $x=271$, daraus wird $2+7xx=514089=717^2$.

60.

Wir wollen ferner diese Formel betrachten $5xx+3x+7$, welche ein Quadrat wird, wenn $x=-1$. Deswegen setze man $x=y-1$, so wird unsere Formel in diese verwandelt

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + 5y - 3 \\ + 7 \\ \hline 5yy - 7y + 9 \end{array}$$

davon setze man die Quadratwurzel $=3-\frac{my}{n}$, so wird $5yy-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$; daher wir bekommen $5nny-7nn=-6mn+mmy$, und $y=\frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$, folglich $x=\frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$.

Es sey $m=2$ und $n=1$, so wird $x=-6$, und also $5xx+3x+7=169=13^2$.

Setzt man aber $m=-2$ und $n=1$, so wird $x=18$ und $5xx+3x+7=1681=41^2$.

61.

Laßt uns nun auch diese Formel betrachten $7xx+15x+13$, und sogleich setzen $x=\frac{t}{u}$, also, daß

diese

diese Formel $7tt + 15tu + 13uu$ ein Quadrat seyn soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen, wie folget:

Es sey $t = 1$ und $u = 1$, so wird unsere Formel $= 35$
$t = 2$ und $u = 1$ $= 71$
$t = 2$ und $u = -1$ $= 11$
$t = 3$ und $u = 1$ $= 121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$, und so wird unsere Formel $7yy + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$ oder $7yy + 57y + 121$; davon setze man die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, so bekommt man $7yy + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$, oder $7nny + 57nn = 22mn + mmy$, und daher $y = \frac{57nn - 22mn}{mm - 7nn}$ und $x = \frac{36nn - 22mn + 3mm}{mm - 7nn}$.

Man setze z. E. $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{3}{2}$, und unsere Formel $7xx + 15x + 13 = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{17}{6}$. Nimmt man $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = \frac{129}{2}$, und unsere Formel $7xx + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = (\frac{347}{2})^2$.

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst, einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx + 2$, oder wenn man für x schreibt $\frac{t}{u}$, dieser $3tt + 2uu$, welche, man mag auch für t und u Zahlen annehmen, die man will, niemals ein Quadrat wird. Dergleichen

chen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth seyn, einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkennt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden, wo ein Quadrat heraus kommt, wozu das folgende Capitel bestimmt ist.



Capitel 5.

Von den Fällen, da die Formel $a+bx+cxx$ niemals ein Quadrat werden kann.

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschiehet, wenn man setzt $x = \frac{y-b}{2c}$, dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt $a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}$, oder $\frac{4ac-bb+yy}{4c}$. Soll diese ein Quadrat werden, so setze man dasselbe $= \frac{zz}{4}$, so wird $4ac - bb + yy = czz$, folglich $yy = czz + bb - 4ac$. Wenn also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese $czz + bb - 4ac$ ein Quadrat, und umgekehrt, wenn diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich, wenn man für $bb-4ac$ schreibt t, so kommt es darauf an, ob eine solche Formel

mel $czz + t$ ein Quadrat werden könne oder nicht? und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es ohnstreitig weit leichter die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

64.

Wenn $t = 0$ ist, so ist offenbar, daß die Formel czz nur alsdenn ein Quadrat werde, wenn die Zahl c ein Quadrat ist. Denn da ein Quadrat durch ein ander Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann czz kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{czz}{zz}$, das ist c, ein Quadrat ist. Also wenn die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel czz auf keinerley Weise ein Quadrat werden: Ist aber c vor sich eine Quadratzahl, so ist auch czz ein Quadrat, man mag für z annehmen was man will.

65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müssen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was oben von den verschiedenen Arten der Zahlen in Ansehung eines jeglichen Theilers angeführt worden.

Also in Ansehung des Theilers 3 sind die Zahlen von dreyerley Art: die erste begreift diejenigen Zahlen, welche sich durch 3 theilen lassen, und durch diese Formel $3n$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig lassen, und in dieser Formel $3n+1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und durch diese Formel $3n + 2$ vorgestellt werden.

Da

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, so wollen wir die Quadraten davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn$, welches sich also nicht nur durch 3, sondern so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n + 1$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn + 6n + 1$, welches durch 3 dividirt giebt $3nn + 2n$ und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art $3n + 1$ gehöret.

Ist endlich die Zahl in dieser Formel $3n + 2$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn + 12n + 4$, welches durch 3 dividirt, giebt $3nn + 4n + 1$, und 1 im Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art $3n + 1$ gehöret: daher ist klar, daß alle Quadratzahlen in Ansehung des Theilers 3, nur von zweyerley Arten sind. Denn entweder lassen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdenn müssen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen lassen; oder wenn sie sich nicht durch 3 theilen lassen, so bleibt allezeit nur 1 im Rest, niemals aber 2. Daher keine Zahl, die in der Form $3n + 2$ enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3xx + 2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch setzen. Denn wenn x eine ganze Zahl ist, und man theilt diese Formel $3xx + 2$ durch 3, so bleiben 2 übrig, daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Wenn aber x ein Bruch ist, so setze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also t und u kei-

u keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun $\frac{3tt}{uu} + 2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit uu multiplicirt, das ist diese $3tt + 2uu$ ein Quadrat seyn, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Denn entweder läßt sich die Zahl u durch 3 theilen oder nicht: läßt sie sich theilen, so läßt sich t nicht theilen, weil sonst t und u einen gemeinen Theiler hätten.

Man setze daher $u = 3f$, so wird unsere Formel $3tt + 18ff$, welche durch 3 getheilt giebt $tt + 6ff$, so sich nicht weiter durch 3 theilen läßt, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar 6ff theilen läßt, tt aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Reste blos auf das zweyte Glied 2uu an. Nun aber uu durch 3 dividirt 1 im Rest hat, oder eine Zahl ist von dieser Art $3n + 1$: so wird 2uu eine Zahl von dieser Art $6n + 2$ seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen: daher unsere Formel $3tt + 2uu$ durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadratzahl seyn kann.

67.

Eben so kann man beweisen, daß auch diese Formel $3tt + 5uu$ niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von diesen: $3tt + 8uu$, $3tt + 11uu$ $3tt + 14uu$ ꝛc. wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 ꝛc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte $u = 3s$, so würde die Formel durch 3 nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also uu eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, so wäre zwar das erste Glied 3tt durch 3 theilbar, das andere aber 5uu von dieser Form $15n + 5$, oder 8uu von dieser Form $24n + 8$,

oder

oder 11 uu von dieser 33n + 11 rc. würde durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn können.

68.

Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel 3tt + (3n + 2). uu, welche nimmermehr ein Quadrat werden kann, und auch nicht wenn für n negative Zahlen gesetzt würden. Also wenn n = −1, so ist es unmöglich, diese Formel 3tt − uu zu einem Quadrat zu machen. Denn wenn u durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar, wäre aber u nicht theilbar durch 3, so würde uu eine Zahl von dieser Art 3n + 1, und also unsere Formel seyn 3tt − 3n − 1, welche durch 3 dividirt übrig läßt − 1, oder um 3 mehr, + 2 übrig läßt. Man setze überhaupt n = − m, so wird unsere Formel 3tt − (3m − 2) uu, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführet; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, da denn alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:
I. 4n, II. 4n + 1, III. 4n + 2, IV. 4n + 3,
enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat 16nn und läßt sich also durch 16 theilen. Ists eine Zahl von der zweyten Art 4n + 1, so ist ihr Quadrat 16nn + 8n + 1, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt, und gehört also zu dieser Formel 8n + 1.

Ists eine Zahl von der dritten Art 4n + 2 so ist ihr Quadrat 16 nn + 16 n + 4, welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in dieser Form 16 n + 4 enthalten ist. Ists endlich eine Zahl von der vierten

Art

Art $4n + 3$, so ist ihr Quadrat $16nn + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

70.

Hieraus lernen wir folgendes, erstlich, daß alle gerade Quadratzahlen in dieser Form $16n$ oder in dieser $16n + 4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nämlich $16n + 2$; $16n + 6$; $16n + 8$; $16n + 10$; $16n + 12$; $16n + 14$, können niemals Quadratzahlen seyn.

Hernach von den ungeraden Quadraten ersehen wir, daß alle in dieser einzigen Formel $8n + 1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 im Rest lassen. Daher alle übrige ungerade Zahlen, welche in einer von dieser Formel $8n + 3$; $8n + 5$; $8n + 7$, enthalten sind, können niemals Quadrate werden.

71.

Aus diesem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß diese Formel $3tt + 2uu$ kein Quadrat seyn kann. Denn entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ist ungerade, weil beyde zugleich nicht gerade seyn können, indem sonst 2 ihr gemeiner Theiler seyn würde. Wären beyde ungerade, und folglich so wohl tt als uu in dieser Form $8n + 1$ enthalten, so würde das erste Glied $3tt$ durch 8 dividirt 3 übrig lassen, das andere Glied aber 2 übrig lassen, beyde zusammen aber würden 5 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3tt$ durch 4 theilen lassen, das andere aber $2uu$ würde durch 4 dividirt 2 übrig lassen, also beyde zusammen würden 2 übrig lassen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerade nämlich $u = 2s$, aber

aber t ungerade und folglich $tt = 8n + 1$, so würde unsere Formel seyn $24n + 3 + 8ss$, welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf diese Formel ausdehnen $3tt + (8n + 2)uu$; imgleichen auch auf diese $(8m + 3)tt + 2uu$, und auch so gar auf diese $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$, wo für m und n alle ganze Zahlen sowohl positive als negative genommen werden können.

72.

Wir gehen solcher Gestalt weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von diesen fünf Formeln:

I. $5n$, II. $5n + 1$, III. $5n + 2$, IV. $5n + 3$, V. $5n + 4$, enthalten sind. Ist nun eine Zahl von der ersten Art, so ist ihr Quadrat $25nn$, welches nicht nur durch 5 sondern auch durch 25 theilbar ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 10n + 1$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt, und also in dieser Formel $5n + 1$ enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 20n + 4$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 30n + 9$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 40n + 16$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wenn daher eine Quadratzahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in diesen Formeln $5n + 2$ und $5n + 3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

73.

Aus diesem Grunde können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5tt + 2uu$ noch diese $5tt + 3uu$ ein Quadrat werden könne. Denn entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht: im erstern Fall würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen lassen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber u nicht theilbar durch 5, so ist uu entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, im erstern Fall wird die erste Formel $5tt + 10n + 2$, welche durch 5 getheilt 2 übrig läßt; die andere aber wird $5tt + 15n + 3$, welche durch 5 getheilt 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber $uu = 5n + 4$, so wird die erste Formel $5tt + 10n + 8$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird $5tt + 15n + 12$, welche durch 3 dividirt 2 übrig läßt, und also auch in diesem Fall kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grunde sieht man auch, daß weder diese Formel $5tt + (5n + 2)uu$, noch diese $5tt + (5n + 3)uu$ ein Quadrat seyn kann, weil eben dieselben Reste als vorher überbleiben, man kann auch so gar im ersten Glied $5mtt$ anstatt $5tt$ schreiben, wenn nur m nicht durch 5 theilbar ist.

74.

Wie alle gerade Quadraten in dieser Form $4n$ alle ungerade aber in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind, und also weder $4n + 2$, noch $4n + 3$, ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß diese allgemeine Formel $(4m + 3)tt + (4n + 3)uu$ niemals ein Quadrat seyn kann. Denn wäre t gerade, so würde sich tt durch 4 theilen lassen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig lassen: wären aber beyde Zahlen t und u ungerade, so würden die Reste von tt und uu, 1 seyn, also von der ganzen Formel würde der

Rest seyn 2. Nun aber ist keine Zahl, welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat; hier ist auch zu merken, daß so wohl m als n negativ, und auch $=0$, genommen werden kann, daher weder diese Formel $3tt + 3uu$ noch diese $3tt - uu$ ein Quadrat seyn kann.

75.

Wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate seyn können, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden, die keine Quadrate seyn können.

Es sey der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadraten untersuchen wollen.

Arten der Zahlen		ihre Quadraten	gehören zu der Art
I.	$7n$	$49nn$	$7n$
II.	$7n + 1$	$49nn + 14n + 1$	$7n + 1$
III.	$7n + 2$	$49nn + 28n + 4$	$7n + 4$
IV.	$7n + 3$	$49nn + 42n + 9$	$7n + 2$
V.	$7n + 4$	$49nn + 56n + 16$	$7n + 2$
VI.	$7n + 5$	$49nn + 70n + 25$	$7n + 4$
VII.	$7n + 6$	$49nn + 84n + 36$	$7n + 1$

Da nun die Quadraten, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten enthalten seyn müssen $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, so werden die drey andern Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun $7n + 3$, $7n + 5$, $7n + 6$, und der Grund davon ist offenbar, weil sich immer zwey Arten finden davon die Quadraten zu einer Gattung gehören.

76. Um

76.

Um dieses deutlicher zu zeigen, so bemerke man, daß die letzte Art $7n + 6$ auch also $7n - 1$ ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die Formel $7n + 5$ mit dieser $7n - 2$ einerley, und $7n + 4$ ist eben so viel als $7n - 3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n + 1$ und $7n - 1$ die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig lassen, nämlich 1; eben so sind auch die Quadraten dieser beyden Arten $7n + 2$ und $7n - 2$ von einerley Gattung.

77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedene Arten der Zahlen folgende

dn;

$dn + 1$, $dn + 2$, $dn + 3$. ꝛc.

$dn - 1$, $dn - 2$, $dn - 3$. ꝛc.

wo die Quadrate von $dn + 1$ und $dn - 1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt 1 übrig lassen, und also beyde zu einer Art nämlich zu $dn + 1$ gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten $dn + 2$ und $dn - 2$, deren Quadrate zu der Art $dn + 4$ gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten $dn + a$ und $dn - a$, deren Quadrate durch d dividirt einerley übrig lassen, nämlich aa; oder so viel als übrig bleibt, wenn man aa durch d theilt.

78.

Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln $att + buu$, welche auf keinerley Weise Quadrate werden können. Also aus dem Theiler 7 erkennt man leicht, daß keine von die-

sen drey Formeln $7tt + 3uu$, $7tt + 5uu$ und $7tt + 6uu$ jemals ein Quadrat werden kann, weil u durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt: ferner, weil bey der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig blieb, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wenn nun dergleichen Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergebens, die man sich geben wollte, um irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen mögte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine vorgegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden sollen.

Die vorgegebene Formel war eigentlich $axx + b$, und weil gemeiniglich für x Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x = \frac{t}{u}$, also daß diese Formel $att + buu$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle, wo so gar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann, wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.



Capitel

Capitel 6.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, da die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird.

79.

Wir haben schon oben gewiesen, wie solche Formeln $a + bx + cxx$ verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und daher begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form $axx + b$ einzuschränken, wobey es darauf ankommt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden sollen aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, denn wäre sie unmöglich, so könnten nicht einmal Brüche für x, geschweige denn ganze Zahlen, statt finden.

80.

Man setze also diese Formel $axx + b = yy$, da denn beyde Buchstaben x und y ganze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe, denn sonst würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte.

Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde wenn man setzt $x = f$, und wollen das Quadrat durch gg andeuten, also daß $aff + b = gg$ wo demnach f und g bekannte Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere

Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

81.

Da nun schon gefunden worden $aff + b = gg$, und über dieses auch seyn soll $axx + b = yy$, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um zu bekommen $axx - aff = yy - gg$, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$; man multiplicire beyderseits mit pq, so hat man $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$: um nun diese Gleichheit heraus zu bringen mache man diese Vertheilung $ap(x+f) = q(y+g)$ und $q(x-f) = p(y-g)$, und aus diesen beyden Gleichungen suche man die beyden Buchstaben x und y: die erste durch q dividirt giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; diese von jener subtrahirt giebt $2g = \frac{(app-qq)x + (app+qq)f}{pq}$, mit pq multiplicirt wird $2pqg = (app - qq)x + (app+qq)f$, und daher $x = \frac{2gpq}{app-qq} - \frac{(app+qq)f}{app-qq}$, und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app-qq} - \frac{(app+qq)fq}{(app-qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey erstere Glieder den Buchstaben g, welche zusammen gezogen geben $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$; die beyden andern enthalten den Buch-

staben

staben fund geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{app-qq}$,

daher wir erhalten $y=\frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}$.

82.

Diese Arbeit scheinet unserm Endzweck gar nicht gemäß zu seyn, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y ganze Zahlen finden sollten, und es würde auf eine neue Frage ankommen, was man für p und q für Zahlen annehmen müßte damit die Brüche wegfallen? welche Frage noch schwerer scheint als unsere Hauptfrage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgriff angewendet werden, wodurch wir leicht zu unserm Endzwecke gelangen: denn da hier alles in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{app+qq}{app-qq}=m$ und $\frac{2pq}{app-qq}$ $=n$, damit man habe $x=ng-mf$ und $y=mg-naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müssen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende laßt uns ihre Quadrate betrachten, da wir denn haben werden

$$mm=\frac{aap^4+2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}$$

und $nn=\frac{4ppqq}{aap^4-2appqq+q4}$

daher bekommen wir:

$$mm-ann=\frac{aap^4+2appqq+q^4-4appqq}{aap^4-2appqq+q^4}$$

$$=\frac{aap^4-2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}=1.$$

 83. Hier-

83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen m und n also beschaffen seyn müssen, daß $mm = ann + 1$. Da nun a eine bekannte Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn eine solche ganze Zahl für n zu finden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist, und so bald man eine solche gefunden, und über dieses auch die Zahl f gefunden, daß $aff + b$ ein Quadrat werde nämlich gg, so bekommt man vor x und y folgende Werthe in ganzen Zahlen $x = ng - mf$, und $y = mg - naf$, und dadurch wird $axx + b = yy$.

84.

Es ist vor sich klar, daß wenn einmal m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil daß Quadrat nn doch einerley bleibt.

Um daher x und y in ganzen Zahlen zu finden, auf daß $axx + b = yy$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nämlich sey $aff + b = gg$, sobald dieser Fall bekannt ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $ann + 1 = mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung soll gegeben werden. Ist nun dieses geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nämlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da denn seyn wird $axx + b = yy$.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen der für bekannt angenommen worden und schreibt $ng + mf$, anstatt f und $mg + naf$, anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen weiter, wenn sie für f und g gesetzt werden, andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, also daß wenn man anfänglich nur einen solchen

Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85.

Die Art wie wir zu dieser Auflösung gelanget sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonders Glück haben weggeschafft werden können, es wird daher gut seyn noch einen andern kürzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

86.

Da seyn soll $axx + b = yy$ und man schon gefunden hat $aff + b = gg$, so giebt uns jene Gleichung $b = yy - axx$, diese aber $b = gg - aff$, folglich muß auch seyn $yy - axx = gg - aff$, und jetzt kommt alles darauf an, daß man aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y finden soll: da denn sogleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wenn man setzt $x = f$ und $y = g$: allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer den der schon für bekannt genommen wird.

Wir wollen demnach setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß da sey $ann + 1 = mm$, daher wird nun $mm - ann = 1$, damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $gg - aff$ so muß auch seyn $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$. Laßt uns zu diesem Ende setzen $y = gm + afn$, so bekommen wir: $ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$, wo sich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben und wir also bekommen $axx = affmm + aggnn + 2afgmn$,

welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, welche Formel offenbar ein Quadrat ist, daraus wir erhalten $x = fm + gn$, welches eben die Formeln sind die wir vorher gefunden haben.

87.

Es wird nun nöthig seyn diese Auflösung durch einige Exempel zu erläutern.

I. Frage: Man suche alle ganze Zahlen für x also daß $2xx - 1$ ein Quadrat werde, oder daß sey $2xx - 1 = yy$?

Hier ist $a = 2$ und $b = -1$, der erste Fall so in die Augen fällt ist nun wenn man nimmt $x = 1$ und $y = 1$. Aus diesem bekannten Falle haben wir nun $f = 1$ und $g = 1$; es wird aber ferner erfordert eine solche Zahl für n zu finden, daß $2nn + 1$ ein Quadrat werde nämlich mm, solches geschiehet nun wenn $n = 2$ und $m = 3$, daher wir aus einem jeden bekannten Fall f und g diese neue finden $x = 3f + 2g$, und $y = 3g + 4f$; da nun der erste bekannte Fall ist $f = 1$ und $g = 1$, so finden wir daraus folgende neue Fälle.

$x = f = 1$	5	29	169
$y = g = 1$	7	41	239 ꝛc.

88.

II. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind?

Es sey z die Dreyeckswurzel, so ist das Dreyeck $\frac{zz + z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß seyn $\frac{zz + z}{2} = xx$: Man multi-

plicire

plicire mit 8 so wird $4zz + 4z = 8xx$ und beyderseits 1 addirt, giebt $4zz + 4z + 1 = (2z + 1)^2 = 8xx + 1$. Es kommt also darauf an, daß $8xx + 1$ ein Quadrat werde, und wenn man setzt $8xx + 1 = yy$, so wird $y = 2z + 1$, und also die gesetzte Dreyeckwurzel $z = \frac{y-1}{2}$.

Hier ist nun $a = 8$, und $b = 1$, und der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, nämlich $f = 0$ und $g = 1$. Damit ferner werde $8nn + 1 = mm$, so ist $n = 1$ und $m = 3$; daher bekommt man $x = 3f + g$ und $y = 3g + 8f$, und $z = \frac{y-1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen.

$x = f$	$= 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g$	$= 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2}$	$= 0$	1	8	49	288	1681	ꝛc.

89.

III. Frage: Man suche alle Fünfeckszahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind?

Die Fünfeckswurzel sey $= z$, so ist das Fünfeck $= \frac{3zz - z}{2}$, so dem Quadrat xx gleich gesetzt werde; daher wird $3zz - z = 2xx$; man multiplicire mit 12 und addire, so wird $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z - 1)^2$.

Setzt man nun $24xx + 1 = yy$, so ist $y = 6z - 1$ und $z = \frac{y+1}{6}$: da nun hier $a = 24$, $b = 1$, so ist der bekannte Fall $f = 0$ und $g = 1$. Da hernach seyn muß

24nn

$24nn + 1 = mm$, so nehme man $n = 1$ und da wird $m = 5$, daher erhalten wir $x = 5f + g$ und $y = 5g + 24f$, und $z = \frac{y+1}{6}$; oder auch $y = 1 - 6z$, so wird ebenfalls $z = \frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden.

$x = f$	$= 0$	1	10	99	980
$y = g$	$= 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6}$	$= \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z = \frac{1-y}{6}$	$= 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Frage: Man suche alle Quadrate in ganzen Zahlen, welche siebenmal genommen und dazu 2 addirt wiederum Quadrate werden?

Hier wird also gefordert, daß seyn soll $7xx + 2 = yy$, wo $a = 7$ und $b = 2$; der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, wenn $x = 1$ und denn ist $x = f = 1$ und $y = g = 3$. Nun betrachte man die Gleichung $7nn + 1 = mm$, und da findet man leicht $n = 3$ und $m = 8$; daher erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus die folgenden Werthe für x gefunden werden.

$x = f = 1$	17	271	
$y = g = 3$	45	717	

91.

V. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich fünfeckigte Zahlen sind?

Es

Es sey die Dreyeckswurzel $= p$ und die Fünfeckswurzel $= q$, so muß seyn $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, oder $3qq - q = pp + p$; hieraus suche man q, und da $qq = \frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$, so wird $q = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{pp+p}{3}\right)}$, das ist $q = \frac{1 \pm \sqrt{(12pp+12p+1)}}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12pp + 12p + 1$ ein Quadrat werde, und das in ganzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p = \frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12pp = 3xx - 6x + 3$ und $12p = 6x - 6$, daher $12pp + 12p + 1 = 3xx - 2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Setzen wir demnach $3xx - 2 = yy$, so haben wir daraus $p = \frac{x-1}{2}$ und $q = \frac{1+y}{6}$: da nun die ganze Sache auf die Formel $3xx - 2 = yy$ ankommt, so ist $a = 3$ und $b = -2$, und der bekannte Fall $x = f = 1$ und $y = g = 1$: hernach haben wir für diese Gleichung $mm = 3nn + 1$: $n = 1$ und $m = 2$, daraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Daher also ist $x = 2f + g$ und $y = 2g + 3f$, so wird:

	$x = f = 1$	3	11	41
	$y = g = 1$	5	19	71
	$p = 0$	1	5	20
	$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder	$q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nämlich auch $q = \frac{1-y}{6}$ ist.

92.

Bisher waren wir gezwungen aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wenn eines vorhanden war: man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formel anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese $axx + bx + c = yy$, und hievon sey schon dieser Fall bekannt $aff + bf + c = gg$.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird $a(xx - ff) + b(x - f) = yy - gg$, welche also durch Factores ausgedrückt werden kann $(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g)$. Man multiplicire beyderseits mit pq, so wird $pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, welche in diese zwey zergliedert werden I.) $p(x - f) = q(y - g)$. II.) $q(ax + af + b) = p(y + g)$. Man multiplicire die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes von diesem, so kommt $(aqq - pp)x + (aqq + pp)f + bqq = 2gpq$, daraus finden wir $x = \frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}$.
Aus der ersten Gleichung ist $q(y - g) = p(x - f) = p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{2afqq}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}\right)$; also $y - g = \frac{2gpp}{aqq-pp} - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}$, und daher $y = g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right) - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}$.

Um diese Brüche wegzubringen, so setze man wie oben geschehen $\frac{aqq+pp}{aqq-pp} = m$ und $\frac{2pq}{aqq-pp} = n$, so wird

$m + 1$

$m + 1 = \frac{2aqq}{aqq - pp}$ und also $\frac{qq}{aqq - pp} = \frac{m+1}{2a}$: also wird seyn $x = ng - mf - b\frac{(m+1)}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$, wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nämlich daß $mm = ann + 1$.

93.

Solcher gestalt sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben b enthaltende Glieder Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Genüge leisten. Allein es ist zu merken, daß wenn man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer ganze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q, finden kann. Denn man nehme p und q dergestalt an, daß $pp = aqq + 1$; da nun $aqq - pp = -1$, so fallen daselbst die Brüche von selbst weg: und da wird
$x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq$ und $y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, weil aber in dem bekannten Fall $aff + bf + c = gg$ nur das Quadrat gg vorkommt, so ist es gleich viel ob man dem Buchstaben g das Zeichen + oder − giebt; man schreibe also − g anstatt + g, so werden unsere Formeln seyn:
$x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq$; und $y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, da denn gewiß seyn wird $axx + bx + c = yy$.

Man suche z. E. diejenigen Sechseckzahlen, welche zugleich Quadrate sind?

Da muß denn seyn $2xx - x = yy$, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall ist hier offenbar $x = f = 1$; und $y = g = 1$.

Da hernach seyn muß $pp = 2qq + 1$, so wird $q = 2$, und $p = 3$; daher wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	ꝛc.

94.

Wir wollen aber bey der erstern Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwegung ziehen, wo die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird in ganzen Zahlen.

Es sey demnach $axx + b = yy$ und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich daß man einen Fall wisse, wo dieses geschiehet: derselbe sey nun $aff + b = gg$.

Zweytens daß man solche Zahlen für m und n wisse, daß $mm = ann + 1$, wozu in folgendem Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nämlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach gleicher Gestalt neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender Gestalt vorstellen wollen:

$x = f$	A	B	C	D	E	
$y = g$	P	Q	R	S	T	ꝛc.

wo $A = ng + mf$	$B = nP + mA$	$C = nQ + mB$	$D = nR + mC$	
und $P = mg + anf$	$Q = mP + anA$	$R = mQ + anB$	$S = mR + anC$	ꝛc.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann als man will.

95.

Nach dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen ohne zugleich die untere zu wissen,

sen, noch die untere ohne die obere zu wissen. Man kann aber leicht eine Regel angeben die obere Reihe allein fortzusetzen ohne die untere zu wissen, welche Regel auch für die untere Reihe gilt ohne daß man nöthig hätte die obere zu wissen.

Die Zahlen nämlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewissen Progression fort wovon man ein jedes Glied z. E. E aus den zwey vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, das ist $E = 2mnR + annC + mmC$, so wird, weil $nR = D - mC$, gefunden $E = 2mD - mmC + annC$ oder $E = 2mD - (mm - ann)C$; da aber $mm = ann + 1$ also $mm - ann = 1$, so haben wir $E = 2mD - C$, woraus erhellet, wie eine jede dieser obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Denn da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, so wird $T = mS + annR + amnC$. Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben giebt, $T = 2mS - R$, also daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet als die obere.

Man suche z. E. alle ganze Zahlen x, daß da werde $2xx - 1 = yy$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$: ferner damit $mm = 2nn + 1$, so wird $n = 2$ und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nämlich ein jedes Glied sechsmal genommen weniger den vorhergehenden giebt das folgende; daher die für x verlangte Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

1, 5, 29, 169, 985, 5741 ꝛc.

Woraus man sieht daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch

Brüche gelten lassen, so würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.



Capitel 7.

Von einer besondern Methode die Formel $ann + 1$ zu einem Quadrat in ganzen Zahlen zu machen.

96.

Was in dem vorigen Capitel vorgetragen worden, kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande ist für eine jegliche Zahl a, eine solche ganze Zahl n zu finden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß man bekomme $mm = ann + 1$.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur setzen dürfte $m = 1 + \frac{np}{q}$. Denn da wird $mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{nnpp}{qq} = ann + 1$, wo sich beyderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch n theilen lassen, da denn mit qq multiplicirt kommt $2pq + npp = anqq$, daraus gefunden wird $n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, woraus unendlich viel Werthe für n gefunden werden können. Da aber n eine ganze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts, daher eine ganz andere Methode gebraucht werden muß, um dieses zu finden.

97.

Vor allen Dingen aber ist zu merken, daß wenn $ann + 1$ ein Quadrat in ganzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn was man vor eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Denn erstlich werden alle Fälle ausgeschlossen, wo a eine negative Zahl ist; hernach werden auch alle die Fälle ausgeschlossen, wo a selbst eine Quadrat Zahl ist, weil alsdenn ann ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber $+ 1$ in ganzen Zahlen ein Quadrat seyn kann. Daher muß unsere Formel also eingeschränkt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative noch eine Quadratzahl sey; so oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann allezeit für n eine solche ganze Zahl gefunden werden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Capitel, unendlich viel andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber ist es genug, eine einige und zwar die kleinste ausfündig zu machen.

98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl a, sondern nur für einen jeglichen Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach von den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen daß $2nn + 1$ ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{(2nn + 1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadratwurzel größer seyn werde als n, doch aber kleiner als $2n$. Man setze daher dieselbe $= n + p$ so wird p gewiß

wiß kleiner seyn als n. Also haben wir $\sqrt{(2nn+1)} = n + p$ und daher $2nn + 1 = nn + 2np + pp$, woraus wir nun n suchen wollen. Da nun ist $nn = 2np + pp - 1$ so wird $n = p + \sqrt{(2pp - 1)}$.

Es kommt also darauf an, daß $2pp - 1$ ein Quadrat werde, welches geschiehet wenn $p = 1$ und hieraus findet man $n = 2$ und $\sqrt{(2nn + 1)} = 3$. Wäre dieses letztere nicht sogleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2pp-1)}$ größer als p und daher n größer als 2p, so setze man $n = 2p + q$, da denn wird $2p + q = p + \sqrt{(2pp-1)}$ oder $p + q = \sqrt{(2pp - 1)}$, hievon die Quadrate genommen, kommt $pp + 2pq + qq = 2pp - 1$ oder $pp = 2pq + qq + 1$ und daraus wird $p = q + \sqrt{(2qq + 1)}$, also muß $2qq + 1$ ein Quadrat seyn, welches geschiehet wenn $q = 0$ daher $p = 1$ und $n = 2$. Aus diesem Exempel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99.

Es sey nun $a = 3$, so daß die Formel $3nn + 1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3nn+1)} = n + p$, da wird $3nn + 1 = nn + 2np + pp$ und $2nn = 2np + pp - 1$ und daraus $n = \frac{p + \sqrt{(3pp-2)}}{2}$: da nun $\sqrt{(3pp - 2)}$ größer als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p, so setze man $n = p + q$, da wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp - 2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3pp - 2)}$: hiervon die Quadrate genommen, wird $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$ oder $2pp = 4pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 2pq + 2qq + 1$, daher $p = q + \sqrt{(3qq + 1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich und also $q = 0$ leistet

leistet ein Genüge, daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $\sqrt{(3nn + 1)} = 2$.

100.

Nun sey $a = 5$ um diese Formel $5nn + 1$ zu einem Quadrat zu machen, davon die Wurzel größer ist als $2n$: daher setze man $\sqrt{(5nn + 1)} = 2n + p$ da wird $5nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ und daraus $nn = 4np + pp - 1$; daher $n = 2p + \sqrt{(5pp - 1)}$. Weil nun $\sqrt{(5pp - 1)}$ größer ist als $2p$, so ist auch n größer als $4p$; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q = \sqrt{(5pp - 1)}$ oder $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; daher $pp = 4pq + qq + 1$ und also $p = 2q + \sqrt{(5qq + 1)}$; dieser geschieht ein Genüge wenn $q = 0$, folglich $p = 1$ und $n = 4$; daher $\sqrt{(5nn + 1)} = 9$.

101.

Es sey ferner $a = 6$ um $6nn + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6nn + 1)} = 2n + p$, so wird $6nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ oder $2nn = 4np + pp - 1$ und daher $n = p + \frac{\sqrt{(6pp - 2)}}{2}$, oder $n = \frac{2p + \sqrt{(6pp - 2)}}{2}$ also n größer als $2p$, man setze deswegen $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp - 2)}$ oder $2p + 2q = \sqrt{(6pp - 2)}$. Die Quadrate genommen, wird $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$ oder $2pp = 8pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 4pq + 2qq + 1$, woraus gefunden wird $p = 2q + \sqrt{(6qq + 1)}$; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q = 0$ gesetzt werden kann, daraus denn wird $p = 1$ und $n = 2$, also $\sqrt{(6nn + 1)} = 5$

102.

Es sey weiter $a = 7$ und $7nn + 1 = mm$; es ist also m größer als $2n$, daher setze man $m = 2n$

$+ p$, so wird $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ oder $3nn = 4np + pp - 1$, daraus gefunden wird $n = \frac{2p + \sqrt{(7pp - 3)}}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$ und also größer als p, so setze man $n = p + q$, so wird $p + 3q = \sqrt{(7pp - 2)}$, die Quadrate genommen $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; $6pp = 6pq + 9qq + 3$, oder $2pp = 2pq + 3qq + 1$, daraus kommt $p = \frac{q + \sqrt{(7qq + 2)}}{2}$. Da nun hier n größer ist als $\frac{3q}{2}$, also größer als q, so setze man $p = q + r$, so wird $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$, die Quadrate genommen $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$ oder $6qq = 4qr + 4rr - 2$ oder $3qq = 2qr + 2rr - 1$ daraus gefunden wird $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 3)}}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$. Die Quadrate genommen; $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, oder $3rr = 12rs + 9ss + 3$ und $rr = 4rs + 3ss + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und da bekommt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann folgender Gestalt sehr abgekürzt werden, welches auch in andern Fällen statt findet.

Da $7nn + 1 = mm$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$ oder $2nn = 6np - pp + 1$, und daraus $n = \frac{3p - \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$, also ist n kleiner als $3p$, deswegen setze man $n = 3p - q$, so wird $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 2)}$ und die Quadrate genommen $9pp - 12pq$

$+ 4qq$

$+ 4qq = 7pp + 2$, oder $2pp = 12pq - 4qq + 2$ und $pp = 6pq - 2qq + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7qq+1)}$. Hier kann man nun sogleich setzen $q = 0$, da wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$ wie vorher.

103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, also daß $8nn + 1 = mm$ und daher m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, oder $nn = 6np - pp + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, daher man setzen kann $p = 0$, da kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104.

Gleichergestalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl a, wenn dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem solchen Wurzelzeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. E. zu dieser $\sqrt{(att + 1)}$, da man denn nur setzen darf $t = 0$, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf wenn man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $ann + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewisse Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geschwind, kommt man aber zu $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger und daher wird es gut seyn diesen Fall allhier auszuführen.

105.

Es sey demnach $a = 13$ also daß seyn soll $13nn + 1 = mm$. Weil nun mm größer ist als $9nn$, und also m größer als $3n$, so setze man $m = 3n + p$, da wird $13nn + 1 = 9nn + 6np + pp$, oder $4nn = 6np + pp$

$+ pp - 1$, daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(13pp - 4)}}{4}$, daher n größer als $\frac{5}{4}$ p und also größer als p. Man setze also $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13pp - 4)}$; die Quadrate genommen $13pp - 4 = pp + 8pq + 16qq$, daher $12pp = 8pq + 16qq + 4$, oder durch 4 getheilt $3pp = 2pq + 4qq + 1$ und daraus $p = \frac{q + \sqrt{(13qq + 3)}}{3}$.

Hier ist p größer als $\frac{q + 3q}{3}$, also größer als q: man setze demnach $p = q + r$, so wird:
$2q + 3r = \sqrt{(13qq + 3)}$, das Quadrat genommen $13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, das ist $9qq = 12qr + 9rr - 3$, durch 3 dividirt $3qq = 4qr + 3rr - 1$, daraus wird $q = \frac{2r + \sqrt{(13rr - 3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r + 3r}{3}$ und also q größer als r; daher setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13rr - 3)}$: das Quadrat genommen $13rr - 3 = rr + 6rs + 9ss$, oder $12rr = 6rs + 9ss + 3$, durch 3 dividirt wird $4rr = 2rs + 3ss + 1$ und daraus $r = \frac{s + \sqrt{(13ss + 4)}}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder s, daher setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = \sqrt{(13ss + 4)}$: das Quadrat genommen $13ss + 4 = 9ss + 24st + 16tt$ und also $4ss = 24ts + 16tt - 4$, durch 4 dividirt $ss = 6ts + 4tt - 1$, daraus wird $s = 3t + \sqrt{(13tt - 1)}$. Also ist s größer als $3t + 3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = \sqrt{(13tt - 1)}$, das Quadrat genommen $13tt - 1 = 9tt + 6tu + uu$ und daraus $4tt = 6tu + uu$

$+1$

$+1$ und $t = \frac{3u + \sqrt{(13uu+4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u. Man setze deswegen $t = u + v$, so wird $u + 4v = \sqrt{(13uu+4)}$: das Quadrat genommen $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$ und $12uu = 8uv + 16vv - 4$, durch 4 dividirt $3uu = 2uv + 4vv - 1$, daraus $u = \frac{v + \sqrt{(13vv - 3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, deswegen setze man $u = v + x$, so wird $2v + 3x = \sqrt{(13vv - 3)}$; das Quadrat genommen $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$ oder $9vv = 12vx + 9xx + 3$, durch 3 dividirt $3vv = 4vx + 3xx + 1$, daraus man findet $v = \frac{2x + \sqrt{(13xx+3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{2}{3}x$ und also größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13xx+3)}$, die Quadrate genommen $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$ oder $12xx = 6xy + 9yy - 3$, durch 3 dividirt $4xx = 2xy + 3yy - 1$ und $x = \frac{y + \sqrt{(13yy - 4)}}{4}$, wo x größer ist als y: deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13yy - 4)}$, die Quadrate genommen $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$ oder $4yy = 24yz + 16zz + 4$, durch 4 dividirt $yy = 6yz + 4zz + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13zz + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist so setze man $z = 0$, und da bekommt man rückwärts gehend, wie folget:

$z = 0$
$y = 1$
$x = y + z = 1$
$v = x + y = 2$
$u = v + x = 3$
$t = u + v = 5$

$s = 6t + u = 33$
$r = s + t = 38$
$q = r + s = 71$
$p = q + r = 109$
$n' = p + q = 180$
$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach o die kleinste ganze Zahl für n, daß $13nn + 1$ ein Quadrat werde.

106.

Aus diesem Exempel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden könne. Denn unter den größern Zahlen hat man oft nöthig wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, daher es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörigen Buchstaben m und n hernehmen könne.

107.

Inzwischen ist zu merken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können; dieses geschiehet aber nur bey denen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadratzahl, welches zu zeigen der Mühe Werth seyn wird.

108.

Es sey demnach $a = ee - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadratzahl, und da seyn soll $(ee - 2) nn + 1$

$+1 = mm$, so ist offenbar m kleiner als en, deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(ee - 2) nn + 1 = eenn - 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, wo sogleich in die Augen fällt, daß wenn man nimmt $p = 1$, das Wurzelzeichen wegfalle und da seyn werde $n = e$ und $m = ee - 1$.

Wäre z. E. $n = 23$, wo $e = 5$, so wird $23nn + 1 = mm$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wenn nämlich $a = ee - 2$, so wird $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee - 1$.

109.

Es sey nun auch $a = ee - 1$ nämlich um 1 weniger als eine Quadratzahl, also daß seyn soll $(ee - 1)nn + 1 = mm$. Da nun hier wieder m kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(ee - 1) nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$: wo das Wurzelzeichen wegfällt, wenn $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2ee - 1$. Dieses ist auch leicht zu sehen: Denn da $a = ee - 1$ und $n = 2e$, so wird $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee - 1$. Es sey z. E. $a = 24$ also daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$. *)

110.

*) Das Wurzelzeichen in diesem Fall verschwindet auch, wenn $p = 0$ gesetzt wird; daher wir denn unstreitig die kleinste Zahlen für n und m erhalten, welche sind $n = 1$ und $m = e$. Also wird wenn $e = 5$, die Formel $24nn + 1$ ein Quadrat wenn $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

110.

Es sey nun auch $a = ee + 1$, oder um 1 größer als eine Quadratzahl, also daß seyn soll $(ee + 1)nn + 1 = mm$, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(ee + 1)nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$ wo $p = 1$ genommen werden kann, und da wird $n = 2e$ und $m = 2ee + 1$: dieses ist auch leicht einzusehen, denn da $a = ee + 1$ und $n = 2e$, so ist $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee + 1$. Es sey z. E. $a = 17$ also daß $e = 4$, und da wird $17nn + 1 = mm$, wenn $n = 8$ und $m = 33$.

111.

Es sey endlich $a = ee + 2$, oder um 2 größer als eine Quadratzahl, also soll seyn $(ee + 2)nn + 1 = mm$, wo m offenbar größer ist als en, daher setze man $m = en + p$, so wird $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp + pp - 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp + 2pp - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = ee + 1$. Dieses fällt auch sogleich in die Augen, denn da $a = ee + 2$ und $n = e$, so ist $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee + 1$. Es sey z. E. $a = 11$ also daß $e = 3$, so wird seyn $11nn + 1 = mm$, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man setzen $a = 83$ so ist $e = 9$, und es wird $83nn + 1 = mm$, wenn man nimmt $n = 9$ und $m = 82$.



Tabelle

Tabelle

welche für einen jeglichen Werth von a die kleinste Zahlen m und n angiebt, also daß mm=ann+1

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	n	m	a	n	m
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

Capitel 8.

Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3)}$ rational zu machen.

112.

Wir schreiten hier fort zu einer Formel, da x zu der dritten Potestät ansteiget, um hernach bis zur vierten weiter zu gehen, ohngeacht diese beyde Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müssen.

Es soll also diese Formel $a+bx+cxx+dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und zu diesem Ende geschickte Werthe für x in Rationalzahlen gesucht werden: denn da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthiget sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in ganzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu merken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmal zu unendlich viel Auflösungen leitet.

113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a+bx+cxx$ unendlich viel Fälle giebt, da die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel statt, wo nicht einmahl an eine Auflösung zu gedenken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat: daher man

man blos allein für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfündig machen kann, aus welcher nachgehends auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, also daß man solcher Gestalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwischen geschieht es aber doch öfters, daß wenn gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. Also daß in solchen Fällen nur eine einzige statt findet, welcher Umstand besonders zu bemerken ist, weil in dem vorhergehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viel neue gefunden werden können.

114.

Wenn also eine solche Formel $a + bx + cxx + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden, wo dieses geschieht: ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wenn das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $ff + bx + cxx + dx^3$, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man setzt $x = 0$.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen, und sehen wie aus dem bekannten Fall $x = 0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne, zu diesem Ende kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

115.

Es sey demnach diese Formel $1 + 2x - xx + x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist, so nehme man

die Wurzel von diesem Quadrat also an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey demnach die Quadratwurzel $1 + x$, davon das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir $1 + 2x - xx + x^3 = 1 + 2x + xx$, wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung herauskommt $xx = - xx + x^3$ oder $x^3 = 2xx$, welche durch xx dividirt so gleich giebt $x = 2$, woraus unsere Formel wird $1 + 4 - 4 + 8 = 9$.

Gleichergestalt wenn diese Formel $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man erstlich die Wurzel $= 2 + nx$, und suche n, also daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun wird $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nnxx$, so muß seyn $4n = 6$, und also $n = \frac{3}{2}$, woher diese Gleichung entspringt $- 5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$, oder $3x^3 = \frac{29}{4}xx$, daher $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, dessen Wurzel seyn wird $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$.

116.

Der zweyte Weg bestehet darinn, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f + gx + hxx$, welche also beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen:

Es sey z. E. diese Formel gegeben $1 - 4x + 6xx - 5x^3$, hiervon setze man die Wurzel $1 - 2x + hxx$, da denn seyn soll $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4$; hier fallen die zwey ersten Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß seyn $6 = 2h + 4$, und also $h = 1$, daraus bekommen wir $- 5x^3 = - 4x^3 + x^4$, wodurch x^3 dividirt wird; $- 5 = - 4 + x$ und $x = - 1$.

117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wenn das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f+px$, wo f die Quadratwurzel des ersten Glieds ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nämlich $cxx+dx^3$ mit $ppxx$ verglichen werden muß, da denn die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth vor x angiebt, welcher seyn wird $x=\frac{pp-c}{d}$. Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder, und setzt dieselbe $f+px+qxx$, wenn nämlich $a=ff$, und bestimmt p und q dergestalt, daß die drey ersten Glieder beyderseits verschwinden, welches also geschiehet: Da

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$ so muß seyn $b=2fp$ also $p=\frac{b}{2f}$, und $c=2fq+pp$ also $q=\frac{c-pp}{2f}$: und die übrige Gleichung $dx^3=2pqx^3+qqx^4$ läßt sich theilen, und wird daraus $x=\frac{d-2pq}{qq}$.

118.

Inzwischen kann es öfters geschehen, daß obgleich $a=ff$ dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus dieser Formel $ff+dx^3$ zu ersehen, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Denn

Denn setzt man nach der ersten, die Wurzel $= f + px$, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, daher bekommt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll $ff + dx^3$

$$= ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4, \text{ so} \\ + ppxx$$

muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, ferner $0 = 2fq + pp$, und also $q = 0$, daher man bekommt $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$.

119.

In solchen Fällen ist nun nichts anders zu thun, als daß man sehe, ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man denn aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht wenn gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen, so soll diese Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn, da nun solches geschieht, wenn $x = 1$ so setze man $x = 1 + y$, und da bekommt man diese $4 + 3y + 3yy + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$; wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, und also $p = \frac{3}{4}$, alsdenn wird, $3 + y = pp$ und $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qyy$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3$

$$= 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4, \text{ wo} \\ + ppyy$$

Q 4 nun

nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3 = 4q + pp$, also $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{39}{64}$; so haben wir $1 = 2pq + qqy$, und daraus $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$, oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

120.

Nun wollen wir auch zeigen, wenn man schon einen solchen Werth gefunden hat, wie man daraus weiter einen andern neuen finden soll? Dieses wollen wir auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf diese Formel anwenden $a + bx + cxx + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde wenn $x = f$, und daß alsdenn sey $a + bf + cff + df^3 = gg$. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man diese neue Formel:

$$\begin{array}{llll} a & & & \\ + bf & + by & & \\ + cff & + 2cfy & + cyy & \\ + df^3 & + 3dffy & + 3dfyy & + dy^3 \\ \hline \end{array}$$

$$gg + (b + 2cf + 3dff)\,y + (c + 3df)\,yy + dy^3$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, also, daß die beyden obigen Methoden angewandt werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden; nämlich $x = f + y$.

121.

Bisweilen hilft es aber auch nichts, wenn man gleich einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wenn man setzt $x = 2$. Denn setzt man diesem zu folge $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus $9 + 12y$
$+ 6$

$+ 6yy + y^3$, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon nach der ersten Regel die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + ppyy$; wo seyn muß $12 = 6p$ und $p = 2$; alsdenn wird $6 + y = pp = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + 6qyy + 2pqy^3 + qqy^4$
$+ ppyy$
wo seyn muß, erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$; hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; daher $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschlossen werden kann: denn wollte man setzen $x = -1 + z$, so käme diese Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt, und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß diese Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne außer diesen drey Fällen.
I.) $x = 2$, II.) $x = 0$, III.) $x = -1$,
welches aber auch aus andern Gründen bewiesen werden kann.

122.

Zur Uebung wollen wir noch diese Formel betrachten $1 + 3x^3$, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird I.) $x = 0$, II.) $x = 1$, III.) $x = 2$, und wir wollen sehen, ob wir noch andere solche Werthe finden können.

Da nun bekannt daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$: und da bekommt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9yy + 3y^3$, davon sey die Wurzel $2 + py$,

also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$, wo seyn muß $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$: die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$ und $y = -\frac{21}{16}$; folglich $x = -\frac{5}{16}$, da denn $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel ist $-\frac{61}{64}$, oder auch $+\frac{61}{64}$: wollte man nun weiter setzen $x = -\frac{5}{16} + z$, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen $2 + py + qyy$ also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4$, so müßte erstlich seyn
$+ ppyy$
$9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$; hernach $9 = 4q + pp = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Gliedern wird $3 = 2pq + qqy = \frac{567}{128} + qqy$, oder $567 + 128qqy = 384$, oder $128qqy = -183$, das ist $126.\ \frac{63}{64}\ y = -183$, oder $42.\ \frac{63}{64}\ y = -61$, daher $y = -\frac{1952}{1323}$, folglich $x = -\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der obigen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

123.

Hier haben wir aus dem bekannten Fall $x = 1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen, wenn man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitläuftige Brüche gerathen würde.

Daher hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches ohne Zweifel ein Zeichen ist, von der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode. Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x = 2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, also daß diese Formel ein Quadrat seyn soll $25 + 36y + 18yy + 3y^3$; hiervon sey die Wur-

zel

zel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + ppyy$, und also $36 = 10p$ oder $p = \frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern durch yy dividirt, $18 + 3y = pp = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$, und $x = \frac{8}{25}$, daraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat davon die Wurzel ist $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5 + py + qyy$, so wird

$$25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + 10qyy + 2pqy^3 + ppyy + qqy^4;$$

wo um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen seyn muß $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$; hernach $18 = 10q + pp$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder durch y^3 getheilt geben, $3 = 2pq + qqy$, oder $qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$; also $y = -\frac{3275}{1323}$, und $x = -\frac{629}{1323}$.

124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grund es ganz leicht ist so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel geschieht $1 - x - xx + x^3$, wo auf eine allgemeine Art genommen werden kann $x = nn - 1$, und da n eine jegliche beliebige Zahl bedeutet.

Denn wenn $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so wird $x = 8$ und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es ereignet sich aber hier ein ganz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu danken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wenn wir unsere Formel in Factores auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen lasse und der Quotient seyn werde $1 - xx$, welcher

weiter aus diesen Factoren besteht $(1+x)(1-x)$; also daß unsere Formel diese Gestalt erhält: $1-x-xx+x^3=(1-x)(1+x)(1-x)=(1-x)^2.(1+x)$. Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1+x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt wenn $1+x$ ein Quadrat ist, so wird auch $(1-x)^2(1+x)$ ein Quadrat, man darf also nur setzen $1+x=nn$, so bekommt man so gleich $x=nn-1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerkt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125.

Bey einer jeden gegebenen Formel ist es demnach sehr gut dieselbe in Factores aufzulösen, wenn es nämlich möglich ist.

Wie dieses anzustellen sey, ist schon oben angezeigt worden: man setzt nämlich die gegebene Formel $=0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, da denn eine jede Wurzel z. E. $x=f$, einen Factor $f-x$ dargiebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler sind der bloßen Zahl.

126.

Dieser Umstand trifft auch ein bey unserer allgemeinen Formel $a+bx+cxx+dx^3$, wenn die zwey ersten Glieder wegfallen, also daß $cxx+dx^3$ ein Quadrat seyn soll: denn alsdenn muß auch nothwendig diese Formel durch das Quadrat xx dividirt, nämlich $c+dx$ ein Quadrat seyn, da man denn nur setzen darf $c+dx=nn$, um zu bekommen $x \pm \frac{nn-c}{d}$, welche

auf

auf einmal unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

127.

Wenn man bey dem Gebrauche der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wollte, um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die vorgegebene Formel $ff + bx + cxx + dx^3$, und man setze die Wurzel davon $= f + px$, so wird $ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt geben $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird, wie folget

$$x = \frac{pp - c + \sqrt{(p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd)}}{2d}.$$

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.



Capitel 9.

Von der Art diese irrational Formel $\sqrt{}(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)$ rational zu machen.

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zugleich unsere Untersuchung über die Quadratwurzelzeichen endigen müssen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadraten machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wenn das erste Glied a ein Quadrat; der andere, wenn das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall, wenn das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I.) Auflösung der Formel.

$$\sqrt{}(ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4).$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist, so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel = f + px setzen, und p so bestimmen, daß die beyden ersten Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch xx theilen ließen; allein alsdenn würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzelzeichen erfordern. Man muß also

also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f + px + qxx$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, da denn nur eine einfache Gleichung heraus kömmt, aus welcher x ohne Wurzelzeichen bestimmt werden kann.

130.

Man setze daher die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll $ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4$, wo die $+ ppxx$ ersten Glieder von selbst wegfallen; für die zweyten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn $c = 2fq + pp$, oder $q = \frac{c - pp}{2f}$; ist dieses geschehen, so lassen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung $d + ex = 2pq + qqx$; woraus gefunden wird $x = \frac{d - 2pq}{qq - e}$, oder $x = \frac{2pq - d}{e - qq}$.

131.

Es ist aber leicht zu sehen, daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wenn das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wenn sowohl $b = 0$ als $c = 0$, weil alsdenn $p = 0$ und $q = 0$; folglich $x = \frac{d}{-e}$, woraus aber gemeiniglich nichts neues gefunden werden kann, denn in diesem Fall wird offenbar $dx^3 + ex^4 = 0$, und also unsere Formel dem Quadrate ff gleich. Insonderheit aber, wenn auch $d = 0$, so kömmt $x = 0$, welcher Werth nichts weiter hilft, daher diese Methode für solche Formel $ff + ex^4$ keine

Dienste

Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet sich auch, wenn $b=0$ und $d=0$, oder wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel diese Gestalt hat $ff+cxx+ex^4$: denn da wird $p=0$ und $q=\frac{c}{2f}$, woraus gefunden wird $x=0$, welcher Werth so gleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führet.

132.

II.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a+bx+cxx+dx^4+ggx^4)}$$

Diese Formel könnte so gleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man setzet $x=\frac{1}{y}$, denn weil alsdenn diese Formel $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{yy}+\frac{d}{y^3}+\frac{gg}{y^4}$ ein Quadrat seyn müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrate y^4 multiplicirt, ein Quadrat bleiben; alsdenn aber bekömmt man diese Formel $ay^4+by^3+cyy+dy+gg$, welche rückwärts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon also ansetzen $gxx+px+q$, oder umgekehrt $q+px+gxx$, da denn $a+bx+cxx+dx^3+ggx^4=qq+2pqx+2gqxx+2gpx^3+ggx^4$, weil sich nun hier $+ppxx$ die fünften Glieder von selbst aufheben, so bestimme man erstlich p, also, daß sich auch die vierten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $d=2gp$ oder $p=\frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter q, also, daß sich auch die dritten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn

$c=2gq$

$c = 2gq + pp$, oder $q = \frac{c-pp}{2g}$: ist dieses geschehen, so geben die zwey ersten Glieder diese Gleichung $a + bx = qq + 2pqx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a-qq}{2pq-b}$, oder $x = \frac{qq-a}{b-2pq}$.

133.

Hier ereignet sich wiederum der oben angeführte Mangel, wenn das zweyte und vierte Glied fehlet, oder wenn $b = 0$ und $d = 0$; denn da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a-qq}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führet als der Werth $x = 0$ im erstern Falle; daher diese Methode bey solchen Gleichungen $a + cxx + ggx^4$ gar nicht gebraucht werden kann.

134.

III.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}$$

Es ist klar, daß bey dieser Formel beyde obige Methoden angebracht werden können, denn da das erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel setzen $f + px + qxx$ und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel auch setzen $q + px + gxx$, und die drey letzten Glieder verschwinden machen, da man denn zwey Werthe für x heraus bringt.

Allein man kann auch diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln, die derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzet man die Wurzel $= f + px + gxx$, und bestimmt p also, daß die zweyten Glieder

Glieder wegfallen, weil nämlich seyn soll: $ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = ff + 2fpx + 2fgxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4$, so mache man $b = 2fp$ oder $p = \frac{b}{2f}$, und weil alsdenn nicht nur die ersten und letzten Glieder, sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 2fg + pp + 2gpx$, woraus gefunden wird $x = \frac{c-2fg-pp}{2gp-d}$, oder $x = \frac{pp+2fg-c}{d-2gp}$. Hier ist insonderheit zu merken, daß da in der Formel nur das Quadrat gg vorkömmt, die Wurzel davon g sowohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nämlich $x = \frac{c+2fg-pp}{-2gp-d}$, oder $x = \frac{pp-2fg-c}{2gp+d}$.

135.

Es giebt auch noch einen andern Weg diese Formel aufzulösen: man setzet nämlich, wie vorhero die Wurzel $= f + px + gxx$, bestimmt aber p dergestalt, daß die vierten Glieder sich einander aufheben, nämlich man setzet in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen durch x dividirt diese einfache Gleichung $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, woraus man findet $x = \frac{b-2fp}{2fg+pp-c}$; wobey zu merken, daß weil in der Formel nur das Quadrat ff vorkömmt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, also daß auch seyn wird $x = \frac{b+2fp}{pp-2fg-c}$; also daß auch hieraus zwey neue

Werthe

Werthe für x gefunden werden, und folglich durch die bisher erklärte Methode in allem sechs neue Werthe heraus gebracht worden.

136.

Hier ereignet sich aber auch wiederum der verdrießliche Umstand, daß wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, oder $b = o$ und $d = o$, kein tüchtiger Werth für x herausgebracht werden kann, und also die Auflösung dieser Formel $ff + cxx + ggx^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Denn weil $b = o$ und $d = o$, so hat man für die beyde Arten $p = o$, und daher giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{o}$, die andere Art aber $x = o$, aus welchen beyden nichts weiter gefunden werden kann.

137.

Dieses sind nun die drey Formeln, auf welche die bisher erklärten Methoden angewandt werden können, wenn aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x errathen hat, durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Laßt uns demnach setzen, man hätte schon gefunden, daß unsere Formel ein Quadrat werde, wenn man setzet $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 + eh^4 = kk$, so darf man nur setzen $x = h + y$, so bekömmt man eine neue Formel, in welcher das erste Glied seyn wird kk, und also ein Quadrat, daher der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandelung kann auch gebraucht werden, wenn man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. E. $x = h$ gefunden hat, denn da darf man nur setzen $x = h + y$, so erhält man eine neue Gleichung, auf welche die obige Methode angewandt werden könne: da man denn aus dem schon gefundenen

Werthe

Werthe für x andere neue herausbringen kann, und mit diesem neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren, und also immer mehr neue Werthe für x ausfündig machen.

138.

Insonderheit aber ist von den schon öfters gemeldeten Formeln, wo das zweyte und vierte Glied mangelt zu merken, daß keine Auflösung von denselben zu haben ist, wofern man nicht schon eine gleichsam errathen hat; wie aber alsdenn zu verfahren sey, wollen wir bey dieser Formel $a + ex^4$ zeigen, als welche sehr oft vorzukommen pfleget.

Wir wollen also setzen man habe schon einen Werth $x = h$ errathen, also daß da sey, $a + eh^4 = kk$, um nun daraus noch andere zu finden setze man $x = h + y$, so wird diese Formel ein Quadrat seyn müssen $a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, das ist $kk + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, welche zu der ersten Art gehöret; man setze daher die Quadratwurzel davon $k + py + qyy$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrate $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo erstlich
$+ ppyy$
p und q so bestimmt werden müssen, daß auch die zweyten Glieder wegfallen, weswegen seyn muß $4eh^3 = 2kp$ und also $p = \frac{2eh^3}{k}$; ferner $6ehh = 2kq + pp$, dahero $q = \frac{6ehh - pp}{2k}$, oder $q = \frac{3ehhkk - 2eeh6}{k^3}$, oder $q = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; folglich da $eh^4 = kk - a$, so wird $q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}$: hernach geben die folgenden Glie-

der

der durch y^3 dividirt $4eh + ey = 2pq + qqy$, woraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, wovon der Zähler in diese Form $\frac{4ehk^4 - 4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner da $eh^4 = kk - a$, in dieser verwandelt wird $\frac{4ehk^4 - 4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh(-akk+2a^2)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}$. Der Nenner aber $qq - e$ wird $= \frac{e(kk-a)(kk+2a)^2 - ek^6}{k^6}$, und dieses wird $= e\frac{(3ak^4-4a^3)}{k^6}$ $= \frac{ea(3k^4-4aa)}{k^6}$, woraus der gesuchte Werth seyn wird $y = \frac{4aeh(2a-kk)}{k^4} \cdot \frac{k^6}{ae(3k^4-4aa)}$, das ist $y = \frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$, und daher $x = \frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa}$, oder $x = \frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}$. Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel, nämlich $a + ex^4$, ein Quadrat davon die Wurzel seyn wird $k + py + qyy$, so zu dieser Form gebracht wird: $k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa} + \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^4-4aa)^2}$, weil aus den obigen ist $p = \frac{2eh^3}{k}$, und $q = \frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$, und $y = \frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$.

139.

Wir wollen bey dieser Formel $a + ex^4$ noch stehen bleiben, und weil der Fall $a + eh^4 = kk$ bekannt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen, weil sowohl $x = -h$ als $x = +h$, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art ver-

verwandeln, wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Solches geschieht, wenn wir setzen $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$, welcher Kunstgriff öfters gute Dienste thut, also wird unsere Formel: $\frac{a(1-y)^4 + eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$,

oder $\frac{kk + 4(kk-2a)y + 6kkyy + 4(kk-2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4}$:

hiervon setze man die Quadratwurzel nach den dritten Fall $\frac{k + py - kyy}{(1-y)^2}$, also daß der Zähler unserer Formel gleich seyn muß diesem Quadrate $kk + 2kpy - 2kkyy + ppyy - 2kpy^3 + kky^4$. Man mache, daß die zweyten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4kk - 8a = 2kp$, oder $p = \frac{2kk - 4a}{k}$: die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $6kk + 4(kk - 2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, oder $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$, da nun $p = \frac{2kk-4a}{k}$, und $pk = 2kk - 4a$, so wird $y(8kk - 16a) = \frac{-4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}$;

folglich $y = \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk-4a)}$;

um nun daraus x zu finden, so ist erstlich

$1 + y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk-4a)}$, und denn zweytens

$1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk-4a)}$; also

$\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$; folglich bekommen wir

x =

$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa} \cdot h$, welches aber der nämliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Formel gegeben $2x^4 - 1$, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekannte Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird, ist, wenn $x = 1$: also ist $h = 1$ und $kk = 1$, das ist $k = 1$: hieraus erhalten wir also sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1 + 8 + 4}{3 - 4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potestät vorkömmt, so kann man auch setzen $x = +13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekannt an, so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nämlich

$x = \frac{815730721 + 228488 + 4}{2447192163 - 4} \cdot 13 = \frac{815959213}{2447192159} \cdot 13$, also wird $x = \frac{10607469769}{2447192159}$.

141.

Auf gleiche Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cxx + ex^4$ betrachten, und für den bekannten Fall, da dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, also daß $a + chh + eh^4 = kk$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x = h + y$, da denn unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ chh + 2chy + cyy \\ eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline kk + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^3 + ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist: man setze dem-

nach die Quadratwurzel davon $k + py + qyy$, also daß unsere Formel diesem Quadrate gleich seyn soll $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^3 + qqy^4$: nun be-
$+ ppyy$
stimme man p und q also, daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, worzu erfordert wird, erstlich daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, hernach aber daß $c + 6ehh = 2kq + pp$, oder $q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k}$: alsdenn geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung $4eh + ey = 2pq + qqy$, daraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, und daraus ferner $x = h + y$; in welchem Falle die Quadratwurzel aus unserer Formel seyn wird $k + py + qyy$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekannten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann demnach solcher Gestalt so weit fortgehen als man will.

142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1 - xx + x^4$, wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekannte Fall fällt so gleich in die Augen nämlich $x = 1$, also daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzet man nun $x = 1 + y$, und die Quadratwurzel unserer Formel $= 1 + py + qyy$, so muß erstlich seyn $p = 1$ und hernach $q = 2$; hieraus wird gefunden $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekannte Fall ist, und also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen, daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = \pm 1$.

143.

Es sey ferner diese Formel zum Exempel gegeben $a - 3xx + 2x^4$ wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$. Der bekannte Fall giebt sich auch sogleich, nämlich $x = 1$: es sey demnach $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadratwurzel $1 + py + qyy$, so wird $p = 1$ und $q = 4$, daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, woraus wieder nichts neues gefunden wird.

144.

Ein anderes Exempel sey diese Formel $1 + 8xx + x^4$, wo $a=1$, $c=8$ und $e=1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x=2$; denn nimmt man $h = 2$ so wird $k = 7$, setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qyy$, so muß seyn $p = \frac{32}{7}$, und $q=\frac{272}{343}$; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5880}{2911}$ und $x=-\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen minus weggelassen werden kann. Bey diesem Exempel aber ist zu merken, daß weil das letzte Glied schon vor sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Fall angenommen werden kann.

Es sey demnach wie vorher $x = 2 + y$ so bekommen wir,

$$
\begin{array}{l}
1 \\
32 + 32y + 8yy \\
16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4 \\
\hline
49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4
\end{array}
$$

welche jetzt auf mehrerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann; denn erstlich kann man die Wurzel $7 + py + yy$ setzen, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll $49 + 14py + 14yy + ppyy + 2py^3 + y^4$; nun kann man die letzt ohn eine Glieder verschwinden machen, wenn man setzt $2p=8$, oder

$p = 4$; da denn die übrigen durch y dividirt geben $64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y$, und daher $y = -4$ und $x = -2$, oder $x = +2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweyten Glieder wegfallen, so wird $14p = 64$ und $p = \frac{32}{7}$; da denn die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, oder $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$, und daher $y = -\frac{71}{28}$, folglich $x = -\frac{15}{28}$, oder $x = +\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, davon die Wurzel ist $\frac{1441}{784}$. Da auch $-yy$ die Wurzel ist des letzten Glieds, so kann man die Quadratwurzel davon also setzen $7 + py - yy$, oder die Formel selbst diesem Quadrat gleich $49 + 14py - 14yy - 2py^3 + y^4 + ppyy$

Um nun die letzt ohn eine Glieder wegzubringen setze man $8 = -2p$, oder $p = -4$, so geben die übrigen durch y dividirt $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, daraus wird $y = -4$ wie oben.

Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64 = 14p$ und $p = \frac{32}{7}$: die übrigen aber durch yy dividirt geben $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, oder $32 + 8y = \frac{338}{49} - \frac{64}{7}y$, daraus wird $y = -\frac{71}{28}$ und $x = \mp\frac{15}{28}$, welcher mit dem obigen einerley ist.

145.

Eben so kann man verfahren mit der allgemeinen Formel $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$, wenn ein Fall, nämlich $x = h$, bekannt ist, da dieselbe ein Quadrat nämlich kk, wird: denn alsdenn setze man $x = h + y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern davon das erste seyn wird kk; wird nun die Wurzel davon gesetzt $k + py + qyy$, und man bestimmt p und q dergestalt daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten durch y^3 dividirt

dividirt eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von x mit dem bekannten $x = h$ einerley ist, weil alsdenn nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird.

146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadratwurzelzeichen, da nämlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen so betrachte man diese Formel $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist, wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k + px + qxx$ und p und q so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzelzeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel setzen $k + px + qxx + rx^3$ so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, also daß wenn gleich p, q, und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzelzeichen aufgelöst werden könnte. Daher wir genöthiget sind

hiemit die Formeln die ein Quadrat seyn sollen zu verlassen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzelzeichen fort schreiten.

Capitel 10.

Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ rational zu machen.

147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert daß diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ eine Cubiczahl werde, und daraus also die Cubicwurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müsse, weil sonst die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a + bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur setzen dürfte $a + bx = p^3$, und daraus sogleich gefunden würde $x = \frac{p^3 - a}{b}$.

148.

Hier ist wiederum vor allen Dingen zu merken, daß wenn weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu gedenken sey, wofern nicht schon ein Fall darinn die Formel ein Quadrat wird

wird bekannt ist, derselbe mag nun sogleich in die Augen fallen, oder erst durch probiren gefunden werden müssen.

Das erstere geschieht nun, erstlich wenn das erste Glied ein Cubus ist und die Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, wo der bekannte Fall ist $x = 0$; hernach auch wenn das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist $a + bx + cxx + g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entspringt der dritte wo sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier erwegen wollen.

149.

I. Fall. Es sey die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze demnach die Wurzel davon $f + px$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich seyn soll $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$: da nun die ersten Glieder von selbst wegfallen, so bestimme man p dergestalt daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wenn $b = 3ffp$, oder $p = \frac{b}{3ff}$; alsdenn geben die übrigen Glieder durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 3fpp + p^3x$, woraus gefunden wird $x = \frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubicwurzel schlecht weg setzen $= f$, da man denn bekommen würde $f^3 = f^3 + bx + cxx$; oder $b + cx = 0$ und daraus $x = -\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschlossen werden könnte.

150.

II. Fall. Die vorgegebene Formel habe nun zweytens diese Gestalt $a + bx + cxx + g^3x^3$, man setze

 die

die Cubicwurzel $p + gx$, davon der Cubus ist $p^3 + 3gppx + 3ggpxx + g^3x^3$, da sich denn die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man p also daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geschieht wenn $c = 3ggp$ oder $p = \frac{c}{3gg}$: alsdenn geben die zwey ersten diese Gleichung $a + bx = p^3 + 3gppx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubicwurzel auch schlechtweg setzen können $= gx$, da denn $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$ oder $0 = b + cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

151.

III. Fall. Es sey endlich drittens die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + g^3x^3$, worinn sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; daher dieselbe auf beyde vorhergehende Arten tractirt und also zwey Werthe für x heraus gebracht werden können.

Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel setzen $f + gx$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich werden soll $f^3 + 3ffgx + 3fggxx + g^3x^3$, da denn die ersten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch x dividirt diese Gleichung geben $b + cx = 3ffg + 3fggx$, und daraus $x = \frac{b - 3ffg}{3fgg - c}$.

152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man suche einen Werth zu errathen, da dieselbe ein Cubus wird; hat man einen solchen gefunden welcher sey $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 = k^3$, so

so setze man $x = h + y$, da denn unsere Formel diese Gestalt bekommen wird.

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ chh + 2chy + cyy \\ dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \\ \hline k^3 + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3 \end{array}$$

welche zu der ersten Art gehört, und also für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man denn einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachgehends auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153.

Wir wollen nun diese Methode durch einige Exempel erläutern und erstlich diese Formel $1 + x + xx$ vornehmen, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehöret. Man könnte also sogleich die Cubicwurzel $= 1$ setzen, daraus gefunden würde $x + xx = 0$, das ist $x(1 + x) = 0$; folglich entweder $x = 0$ oder $x = -1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze daher die Cubicwurzel $1 + px$, wovon der Cubus ist $1 + 3px + 3ppxx + p^3x^3$, und mache $1 = 3p$ oder $p = \frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch xx dividirt $1 = 3pp + p^3x$, oder $x = \frac{1-3pp}{p^3}$; da nun $p = \frac{1}{3}$, so wird $x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$, und daher unsere Formel $1 + 18 + 324 = 343$ wovon die Cubicwurzel ist $1 + px = 7$. Wollte man nun weiter setzen $x = 18 + y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen $343 + 37y + yy$, wovon nach der ersten Regel die Cubicwurzel zu setzen wäre $7 + py$, wovon der Cubus ist $343 + 147py + 21ppyy + p^3y^3$: nun setze man $37 = 147p$, oder $p = \frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung $1 = 21pp$
$+ p^3y$,

$+ p^3 y$, also $y = \frac{1-121pp}{p^3}$, das ist $y = \frac{340.\ 121.\ 147}{37^3}$ $= -\frac{1049580}{50653}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154.

Es sey ferner diese Formel gegeben $2 + xx$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden da dieses geschieht, welcher ist $x = 5$: man setze demnach sogleich $x = 5 + y$, so bekommt man $27 + 10y + yy$; davon sey die Cubicwurzel $3 + py$, und also die Formel selbst diesem Cubo $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3$ gleich; man mache $10 = 27p$, oder $p = \frac{10}{27}$, so bekommt man $1 = 9pp + p^3y$, und daraus $y = \frac{1-9pp}{p^3}$, das ist $y = -\frac{10.\ 9.\ 27}{1000}$ oder $y = -\frac{4617}{1000}$, und $x = \frac{383}{1000}$: hieraus wird unsere Formel $2 + xx = \frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubicwurzel seyn muß $3 + py = \frac{129}{100}$.

155.

Man betrachte ferner diese Formel $1 + x^3$, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbaren Fällen $x = 0$ und $x = -1$? Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehöret, so hilft uns doch die Wurzel $1 + x$ nichts, weil der Cubus davon $1 + 3x + 3xx + x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x + 3xx = 0$ oder $x(1 + x) = 0$ giebt, das ist entweder $x = 0$ oder $x = -1$.

Will man ferner setzen $x = -1 + y$, so bekommen wir diese Formel $3y - 3yy + y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehöret: setzt man daher die Cubicwurzel $p + y$ wovon der Cubus ist

$p^3 + 3ppy$

$p^3 + 3ppy + 3pyy + y^3$, und macht $-3 = 3p$ oder $p = -1$, so geben die übrigen $3y = p^3 + 3ppy = -1 + 3y$, folglich $y = \frac{1}{0}$ das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergebens um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann daß diese Formel $1 + x^3$ außer den gemeldten Fällen, nimmer ein Cubus werden kann; denn man hat gezeiget daß die Summe von zweyen Cubis als $t^3 + x^3$ niemals ein Cubus werden kann, daher ist es auch nicht möglich in dem Fall $t = 1$.

156.

Man behauptet auch daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne außer dem Fall $x = -1$: diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht, weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man aber $x = -1 + y$, so bekommt man diese Formel $1 + 3y - 3yy + y^3$, welche nach allen drey Fällen tractirt werden kann. Setzt man nach den ersten die Wurzel $1 + y$, davon der Cubus $1 + 3y + 3yy + y^3$ ist, so wird $-3yy = 3yy$, welches nur geschieht wenn $y = 0$. Setzt man nach den zweyten Fall die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3yy + y^3$, so wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel setzen $1 + y$ welches schon geschehen.

157.

Es sey diese Formel gegeben $3 + 3x^3$ welche ein Cubus werden soll; dieses geschieht nun erstlich in dem Fall $x = -1$, woraus aber nichts geschlossen werden kann, hernach aber auch in dem Fall $x = 2$: man setze deswegen $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus

27+36y

$27 + 36y + 18yy + 3y^3$, welche zum ersten Fall gehöret, daher sey die Wurzel $3 + py$, wovon der Cubus $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3$; man mache also $36 = 27p$, oder $p = \frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch yy dividirt, $18 + 3y = 9pp + p^3y = 16 + \frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y = -2$, daher $y = -\frac{54}{17}$, folglich $x = -\frac{20}{17}$; hieraus wird unsere Formel $3 + 3x^3 = -\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubicwurzel ist $3 + py = \frac{21}{17}$; und aus diesem Werth könnte man noch mehrere finden, wenn man wollte.

158.

Wir wollen zuletzt noch diese Formel betrachten, $4 + xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nämlich, wenn $x = 2$ und $x = 11$. Setzt man nun erstlich $x = 2 + y$, so muß diese Formel ein Cubus seyn $8 + 4y + yy$, dessen Wurzel sey $2 + \frac{1}{3}y$, und also die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}yy + \frac{1}{27}y^3$, woraus man erhält $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$, daher $y = 9$ und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, so bekommt man $125 + 22y + yy$, so dem Cubo von $5 + py$, das ist, $125 + 75py + 15ppyy + p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p = \frac{22}{75}$ genommen, giebt $1 = 15pp + p^3y$, oder $p^3y^3 = 1 - 15pp = -\frac{109}{375}$; daher $y = -\frac{122625}{10648}$, und also $x = -\frac{5497}{10648}$.

Weil x sowohl negativ als positiv seyn kann, so setze man $x = \frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1 - y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und da bekommt man $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, wo also nur noch der Zähler $8 - 8y + 8yy - 8y^3$, oder eben derselbe durch 8 dividirt, nämlich $1 - y + yy - y^3$ zu einem

Cubo

Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus ist $1 - y + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{27}y^3$, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, daher $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$, und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3} - y$, findet man ebendasselbe.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel setzt $1 - y$, wovon der Cubus ist $1 - 3y + 3yy - y^3$, bekommt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{4}{0}$, das ist unendlich; daher wird auf diese Art nichts neues gefunden.

159.

Weil wir aber diese zwey Fälle schon wissen, $x = 2$ und $x = 11$, so kann man setzen $x = \frac{2 + 11y}{1 \pm y}$: denn ist $y = 0$, so wird $x = 2$, ist aber y unendlich groß, so wird $x = \pm 11$.

Es sey demnach erstlich $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$, so wird unsere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121yy}{1 + 2y + yy}$, oder $\frac{8 + 52y + 125yy}{(1 + y)^2}$; man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler, welcher seyn wird $8 + 60y + 177yy + 125y^3$, zu einem Cubo gemacht werden soll.

Man setze demnach erstlich die Wurzel $= 2 + 5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder, sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze demnach nach der zweyten Art die Wurzel $p + 5y$, davon der Cubus $p^3 + 15ppy + 75pyy$ +

$+125y^3$, und mache $177=75p$, oder $p=\frac{59}{25}$, so wird $8+60y=p^3+15ppy$, daher $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{15625}$, und $y=-\frac{80379}{367875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch setzen $x=\frac{2+11y}{1-y}$, und da wird unsere Formel $4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$, wovon der Zähler mit $1-y$ multiplicirt, ein Cubus wird. Also muß auch $8+28y+89yy-125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $=2+\frac{7}{3}y$, davon der Cubus ist $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^4$, so wird $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, und also $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$; folglich $x=11$, welches der schon bekannte Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2-5y$, wovon der Cubus ist $8-60y+150yy-125y^3$, so erhalten wir $28+89y=-60+150y$, folglich $y=\frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x=-\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden, wodurch eine solche Formel, entweder zu einem Quadrat, oder zu einem Cubo gemacht werden kann, wenn nur in jenem Fall die höchste Potestät der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterm aber den dritten nicht übersteiget.

Man könnte noch den Fall hinzu fügen, da eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potestät die zweyte nicht übersteigen muß. Wenn aber eine solche Formel $a+bx+cxx$ ein Biquadrat seyn soll, so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrat gemacht wer-

den,

den, da denn nur noch übrig ist, daß die Wurzel von diesem Quadrat noch ferner zu einem Quadrat gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also, wenn z. E. $xx+7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat, welches geschieht, wenn $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$, oder auch $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; alsdenn wird unsere Formel gleich diesem Quadrat $\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq}$, wovon die Wurzel ist $\frac{7pp+qq}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrat gemacht werden muß: man multiplicire demnach oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdenn wird der Zähler $2pq(7pp+qq)$ ein Quadrat seyn müssen, welches nicht anders geschehen kann, als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Ende setzen $q=pz$, damit diese Formel $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$, und also auch durch p^4 dividirt, nämlich diese $2z(7+zz)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z=1$, daher setze man $z=1+y$, so bekommen wir $(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3$, wovon die Wurzel sey $4+\frac{5}{2}y$, davon das Quadrat $16+20y+\frac{25}{4}yy$, und unserer Formel gleich gesetzt, giebt $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$, und $z=\frac{9}{8}$: da nun $z=\frac{q}{p}$, so wird $q=9$ und $p=8$, daher $x=\frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7+xx=\frac{279841}{20736}$, davon erstlich die Quadratwurzel ist $\frac{529}{144}$, und hiervon nochmals die Quadratwurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe, welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: denn wenn z. E. cxx ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $= px$, und da wird $cxx = p^3x^3$, oder $c = p^3x$, daher $x = \frac{c}{p^3}$: man schreibe $\frac{1}{q}$ anstatt p, so wird $x = cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält, daher auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$, oder $abb + 2abcx + accxx$ ganz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; denn man setze die Cubicwurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt, giebt $a = \frac{b+cx}{q^3}$, daraus $x = \frac{aq^3-b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet, wie höchst nützlich es sey, die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen, so oft solches geschehen kann, und von dieser Materie soll weitläuftig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.



Capitel

Capitel II.

Von der Auflösung dieser Formel $axx + bxy + cyy$ in Factoren.

162.

Hier bedeuten die Buchstaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, gesehen, wie die Frage immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn ist z. E. die gesuchte Zahl x ein Bruch, so darf man nur setzen $x = \frac{t}{u}$, da denn für t und u immer ganze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie dieselbe zu einem Quadrat, oder Cubo, oder einer noch höheren Potestät gemacht werden soll, so ist nöthig, zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben soll, daß diese Formel zwey oder mehr Factores erhalte.

163.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor: der erste ist, wenn sich diese Formel wirklich in zwey rationale Factores auflösen läßt, welches geschieht, wie

wir schon oben gesehen haben, wenn $bb - 4ac$ eine Quadratzahl wird.

Der andere Fall ist, wenn diese beyde Factores einander gleich werden, in welchem die Formel selbst ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wenn sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factores auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht, wenn $bb - 4ac$ eine positive Zahl aber kein Quadrat ist, dieses aber, wenn $bb - 4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle, welche wir hier zu erwägen haben.

164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factores auflösen, so kann dieselbe also vorgestellt werden $(fx + gy)(hx + ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factores in sich schließt. Will man aber, daß dieselbe auf eine allgemeine Art mehr Factores in sich schließe, so darf man nur setzen $fx + gy = pq$ und $hx + ky = rs$, da denn unsere Formel diesem Product $pqrs$ gleich wird, und also vier Factores in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehret werden könnte: hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth, nämlich $x = \frac{pq - gy}{f}$ und $x = \frac{rs - ky}{h}$, woraus gefunden wird $hpq - hgy = frs - fky$, und also $y = \frac{frs - hqp}{fk - hg}$ und $x = \frac{kpq - grs}{fk - hg}$; damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werde, so müssen die Buchstaben p, q, r, s, also angenommen werden, daß sich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen lasse, welches geschieht, wenn sich entweder p und r, oder q und s dadurch theilen lassen.

165.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Formel vorgegeben $xx - yy$, welche aus diesen Factoren besteht $(x+y)(x-y)$: soll dieselbe nun noch mehr Factoren haben, so setze man $x+y=pq$ und $x-y=rs$, so bekommt man $x=\frac{pq+rs}{2}$ und $y=\frac{pq-rs}{2}$; damit nun diese Zahlen ganz werden, so müssen die beyden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerade seyn, oder beyde ungerade.

Es sey z. E. $p=7$, $q=5$, $r=3$ und $s=1$, so wird $pq=35$ und $rs=3$, folglich $x=19$ und $y=16$: daher entspringt $xx-yy=105$, welche Zahl wirklich aus den Factoren 7. 5. 3. 1. besteht: also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factores in sich schließt, und demnach also vorgestellet werden kann $(fx+gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann, als welche aus der Wurzel $fx + gy$ entspringen, setzt man also $fx+gy=pqr$, so wird unsere Formel $ppqqrr$, und kann also so viel Factoren haben, als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frey gestellt, denn man bekommt $x=\frac{pqr-gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteste Formel von dieser Art ist xx, nimmt man $x=pqr$, so schließt das Quadrat xx drey quadratische Factoren in sich, nämlich pp, qq und rr.

167.

Weit mehr Schwierigkeiten aber hat der dritte Fall, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und da erfordert es besondere Kunstgriffe, für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern, so ist zu merken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet, man darf nämlich nur setzen $x = \frac{z-by}{2a}$, da denn diese Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{zz-2byz+bbyy}{4a}+\frac{byz-bbyy}{2a}+cyy=\frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}.$$

Wir wollen demnach sogleich das mittlere Glied weglassen, und diese Formel betrachten $axx+cyy$, wobey es darauf ankommt, was man den Buchstaben x und y für Werthe beylegen soll, damit diese Formel Factores erhalte. Es ist leicht zu erachten, daß solches von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168.

Es sey also erstlich diese Formel gegeben $xx+yy$, welche alle Zahlen in sich begreifet, so eine Summe von zwey Quadraten ist, und wovon wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, unter welchen sich einige Primzahlen befinden, die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutli-

cher

cher wird, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben müsse, daß die Formel $xx + yy$ Theiler oder Factores hat, und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschliessen, wo x und y einen gemeinen Theiler unter sich haben, weil alsdenn $xx + yy$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen lassen; denn wäre z. E. $x = 7p$ und $y = 7q$, so würde die Summe ihrer Quadrate $49pp + 49qq = 49(pp + qq)$ sich gar durch 49 theilen lassen. Daher geht die Frage nur auf solche Formel, wo x und y keinen gemeinen Theiler haben, oder unter sich untheilbar seyn. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen, denn ob man gleich sieht, daß, wenn die beyden Zahlen x und y ungerade sind, alsdenn die Formel $xx + yy$ eine gerade Zahl, und also durch 2 theilbar werde; ist aber eine gerade, und die andere ungerade, so wird die Formel ungerade, ob sie aber Theiler habe oder nicht? ist nicht so leicht zu sehen. Beyde Zahlen aber x und y können nicht gerade seyn, weil sie keinen gemeinen Theiler unter sich haben müssen.

169.

Es seyn demnach die beyden Zahlen x und y untheilbar unter sich, und gleichwohl soll die Formel $xx + yy$ zwey oder mehr Factores in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factores auflösen läßt; allein die irrationale Factores, in welche diese Formel aufgelößt wird, und durch dieses Product vorgestellet werden kann $(x+y\sqrt{-1}).(x-y\sqrt{-1})$ können uns ebendenselben Dienst leisten; denn wenn die Formel $xx+yy$ wirkliche Factores hat, so müssen die irrationale Factoren wiederum Factores haben, indem, wenn diese Factoren keine weitere Theiler hät-

ten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factores irrational, ja so gar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationale Factores haben, sondern sie müssen irrational und so gar imaginär von gleicher Art seyn.

170.

Will man also, daß diese Formel $xx+yy$ zwey rationale Factores bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factores, und setze erstlich $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, da denn, weil $\sqrt{-1}$ so wohl negativ als positiv genommen werden kann, von selbst seyn wird $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, also, daß das Product davon, das ist, unsere Formel seyn wird $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ und dieselbe folglich zwey rationale Factores enthält, nämlich $pp+qq$ und $rr+ss$. Hier ist aber noch übrig, die Werthe von x und y zu bestimmen, als welche auch rational seyn müssen.

Wenn man nun jene irrationale Factores mit einander multiplicirt, so bekommt man $x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$, und $x-y\sqrt{-1}=pr-qs-qr\sqrt{-1}-ps\sqrt{-1}$: addirt man diese Formeln, so wird $x=pr-qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, oder $y=ps+qr$.

Nimmt man also $x=pr-qs$ und $y=ps+qr$, so erhält unsere Formel $xx+yy$ gewiß zwey Factores, indem heraus kommt $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$. Verlangte man mehr Factores, so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $pp+qq$ zwey Factores hätte, und alsdenn hätte man in allem drey Factores, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehret werden kann.

171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden: nimmt man z. E. q negativ, so wird $x=pr+qs$ und $y=ps-qr$, von welchen die Summe der Quadraten eben diejenige ist als vorher; daraus ersehen wir, daß, wenn eine Zahl einem solchen Product $(pp+qq)\cdot(rr+ss)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwey Quadrate zerlegt werden könne, indem man gefunden erstlich $x=pr-qs$ und $y=ps+qr$, und hernach auch $x=pr+qs$ und $y=ps-qr$:

Es sey z. E. $p=3$, $q=2$, $r=2$, und $s=1$, also, daß dieses Product heraus käme $13.5=65=xx+yy$, da denn seyn wird, entweder $x=4$ und $y=7$; oder $x=8$ und $y=1$; in beyden Fällen aber ist $xx+yy=65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summe von zwey Quadratzahlen seyn. Man multiplicire z. E. $2^2+1^2=5$, $3^2+2^2=13$, und $4^2+1^2=17$ mit einander, so kommt 1105, welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadraten zerlegt werden kann.

I.) 33^2+4^2, II.) 22^2+9^2, III.) 31^2+12^2, IV.) 24^2+23^2.

172.

Unter den Zahlen, die in der Form $xx+yy$ enthalten sind, befinden sich also erstlich solche, die aus zwey oder mehrere dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammengesetzt sind; hernach aber auch solche, welche nicht solchergestalt zusammengesetzt sind: diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $xx+yy$ nennen, jene aber zusammengesetzte; daher werden die einfache Zahlen dieser Art seyn

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 ꝛc.

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nämlich Primzahlen, oder solche, welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, und welche alle außer 2 so beschaffen sind, daß, wenn man 1 davon wegnimmt, das übrige durch 4 theilbar werde, oder welche alle in dieser Form $4n+1$ enthalten sind: hernach sind auch Quadratzahlen vorhanden, 9, 49 ꝛc. deren Wurzeln aber 3, 7 ꝛc. nicht vorkommen; wobey zu merken, daß diese Wurzeln 3, 7 ꝛc. in dieser Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbar, daß keine Zahl von dieser Form $4n-1$ eine Summe von zwey Quadraten seyn könne, denn da diese Zahlen ungerade sind, so müßte eines von den beyden Quadraten gerade das andere aber ungerade seyn; wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadraten durch 4 theilbar sind, die ungeraden aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind; wenn man daher ein gerades und ein ungerades Quadrat zusammen addirt, so bekommt die Summe immer diese Form $4n+1$, niemals aber diese Form $4n-1$. Daß aber alle Primzahlen von der Form $4n+1$ eine Summe von zwey Quadraten seyn, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx+2yy$ betrachten, um zu sehen, was x und y für Werthe haben müssen, damit dieselbe Factores erhalte. Da nun diese Formel durch diese imaginäre Factores vorgestellet wird $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, so ersieht man wie vorher, daß, wenn unsere Formel Factores hat, auch ihre imaginäre Factores welche haben müssen; man setze daher erstlich

$x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2})$, so folget von selbst, daß auch seyn müsse $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$,

$(r - s\sqrt{-2})$, und hieraus wird unsere Formel $xx + 2yy = (pp + 2qq)(rr + 2ss)$, und hat also zwey Factores, deren so gar ein jeder von eben derselben Art ist; damit aber dieses geschehe, so müssen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgender Gestalt geschehen kann:

Da $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$ und $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, so ist die Summe $2x = 2pr - 4qs$, folglich $x = pr - 2qs$; hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$, daher $y = qr + ps$. Wenn also unsere Formel $xx + 2yy$ Factores haben soll, so sind dieselben immer also beschaffen, daß der eine seyn wird $pp + 2qq$ und der andere $rr + 2ss$, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art, als $xx + 2yy$; und damit dieses geschehe, so können x und y wieder auf zweyerley Art bestimmt werden, weil q so wohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nämlich haben, erstlich $x = pr - 2qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + 2qs$ und $y = ps - qr$.

174.

Diese Formel $xx + 2yy$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen, und welche wir hier bis auf 50 setzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50; die wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte abtheilen können; da werden denn die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn, 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Primzahlen sind: von denen aber, die hier nicht stehen, kommen die Quadrate vor. Man kann hier

hier auch bemerken, daß alle Primzahlen, die in unserer Formel enthalten sind, entweder in dieser Form $8n+1$, oder in dieser $8n+3$ gehören, da hingegen die übrigen, welche entweder in dieser Form $8n+5$, oder in dieser $8n+7$ enthalten sind, nimmermehr aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen können: es ist aber auch gewiß, daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten sind, sich allezeit in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen lassen.

175.

Laßt uns auf eine gleiche Weise zu dieser allgemeinen Formel $xx+cyy$ fortschreiten, und sehen, was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factores erhalte.

Da nun dieselbe durch dieses Product vorgestellet wird $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factores von gleicher Art: man setze nämlich $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$, und $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$; und da wird unsere Formel werden $xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css)$, woraus erhellet, daß die Factores wiederum von eben der Art als die Formel selbst seyn werden, die Werthe aber von x und y werden sich folgender Gestalt verhalten; $x=pr+cqs$ und $y=qr+ps$, oder $y=ps-qr$, und hieraus ist leicht abzusehen, wie unsere Formel noch mehr Factores erhalten könne.

176.

Nun ist es auch leicht, dieser Formel $xx-cyy$ Factores zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ schreiben darf: inzwischen lassen sich dieselben auch unmittel-

mittelbar also finden; da unsere Formel diesem Product gleich ist $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, so setze man $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+s\sqrt{c})$ und $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})(r-s\sqrt{c})$, woraus so gleich diese Factores erfolgen $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-css)$, welche wieder von eben der Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y lassen sich auch wiederum auf eine doppelte Art bestimmen, nämlich erstlich $x=pr+cqs$, $y=qr+ps$, und hernach auch $x=pr-cqs$ und $y=ps-qr$. Will man die Probe machen, ob solchergestalt das gefundene Product heraus komme, so probire man die erstern Werthe, da denn seyn wird $xx=pprr+2cpqrs+ccqqss$ und $yy=ppss+2pqrs+qqrr$, also $cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$, woraus man erhält:

$$xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr,$$

welches mit dem gefundenen Product $(pp-cqq)(rr-css)$ überein kommt.

177.

Bis hieher haben wir das erste Glied bloß betrachtet, nun wollen wir setzen, daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen, was die Formel $axx+cyy$ für Factores erhalten könne.

Hier ist nun klar, daß unsere Formel diesem Product gleich sey $(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c})$, welchen beyden Factoren demnach wiederum Factores gegeben werden müssen. Hierbey aber ereignet sich eine Schwierigkeit, denn wenn man zufolge der obigen Art setzen wollte $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac}$, woraus man erhielte $2x\sqrt{a}=2apr-2cqs$, und $2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}$

$-ac + 2qr\sqrt{-ac}$, so würde man so wohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keinesweges statt finden.

178.

Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholfen werden, wenn man setzet:
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac})$ $= pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c}$; woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden; $x = pr - cqs$ und $y = qr + aps$, alsdenn aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen $axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss)$, von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer ganz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen, so in der ersteren Form enthalten sind, wenn sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx + acyy$, als welche mit der obigen $xx + cyy$ übereinkommt, mit einander multipliciret, wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wenn zwey Zahlen von der ersten Form $axx + cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdenn gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art $(app + cqq)(arr + css)$ mit einander multipliciren,

ren, und da ist leicht zu sehen, daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr+cqs)^2+ac\,(ps-qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr+cqs=x$ und $ps-qr=y$, so bekommen wir diese Formel $xx+acyy$, welche von der letzteren Art ist; daher denn zwey Zahlen von der erstern Art $axx+cyy$ mit einander multiplicirt, eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürzlich also vorstellen kann; die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II, andeuten, und also I.I giebt II; I.II giebt I; II.II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wenn man mehrere solche Zahlen mit einander multiplicirt; als I.I.I giebt I; I.I.II giebt II; I.II.II giebt I; II.II.II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern, so sey $a=2$ und $c=3$, woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx+3yy$, die andere aber in der Form $xx+6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten.

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16; 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx+3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden, daß $1085-3yy$ ein doppeltes Quadrat, nämlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich, wenn $y=3$, denn da wird $x=23$; hernach auch, wenn

wenn $y=11$, denn da wird $x=19$; drittens auch noch, wenn $y=13$, denn da wird $x=17$, und endlich viertens, wenn $y=19$, denn da wird $x=1$. Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind, welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, ꝛc.

Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nämlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

Capitel 12.

Von der Verwandelung dieser Formel $axx+cyy$ in Quadraten, oder auch höhere Potestäten.

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx+cyy$ öfters unmöglich zu Quadraten gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden, in welcher $a=1$ ist. Z. E. diese Form $2pp-qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p+q)^2-2(p+q)^2$. Setzt man nun $2p+q=x$ und $p+q=y$, so kommt

kommt diese Formel $xx - 2yy$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch immer statt, so oft es möglich ist, dergleichen Formeln zu einem Quadrat zu machen.

Wenn demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrat oder einer andern höhern geraden Potestät gemacht werden soll, so können wir sicher setzen $a = 1$, und die übrigen Fälle als unmöglich ansehen.

182.

Es sey daher diese Formel vorgelegt $xx + cyy$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus diesen Factoren besteht $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so müssen dieselben entweder Quadrate, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Denn wenn das Product von zweyen Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. E. pq, so wird erfordert, entweder, daß $p = rr$ und $q = ss$, das ist, daß ein jeder Factor vor sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mrr$ und $q = mss$, das ist, daß die Factores Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyn, deswegen setze man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbst $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, daher bekommen wir $xx + cyy = mm(pp + cqq)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir diese Gleichungen $x + y\sqrt{-c} = mpp + 2mpq\sqrt{-c} - mcqq$ und $x - y\sqrt{-c} = mpp - 2mpq\sqrt{-c} - mcqq$, wo offenbar daß x gleich seyn muß dem rationalen Theil; $y\sqrt{-c}$, aber dem irrationalen Theil; daher wird $x = mpp - mcqq$; und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Setzt man also $x = mpp - mcqq$ und $y = 2mpq$, so wird unsere Formel $xx + cyy$ ein Quadrat, nämlich $mm(pp + cqq)^2$, davon die Wurzel ist $mpp + mcqq$.

183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn, oder keinen gemeinen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wenn daher $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = pp - cqq$ und $y = 2pq$, da denn diese Formel dem Quadrat $pp + cqq$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x = pp - cqq$, so kann man auch setzen $x = cqq - pp$, weil beyderseits das Quadrat xx einerley wird. Dieses sind nun eben diejenige Formel, die wir schon oben aus ganz andern Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätiget wird.

Denn nach der vorigen Methode, wenn $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$, und da bekommt man $xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{ppyy}{qq}$, wo sich die xx aufheben, die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit qq multiplicirt geben $cqqy = 2pqx + ppy$, oder $cqqy - ppy = 2pqx$: man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cqq - pp}{2pq}$. Da aber x und y untheilbar seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zehler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x = cqq - pp$ und $y = 2pq$, wie vorher.

184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbst Factores, als wenn die vorgegebene Formel wäre $xx + acyy$, welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche giebt $x = acqq - pp$

und

und $y = 2pq$, sondern auch noch diese $x = cqq - app$ und $y = 2pq$; denn da wird ebenfals $xx + acyy = ccq^4 + 2acppqq + aap^4 = (cqq + app)^2$, welches auch geschieht, wenn man nimmt $x = app - cqq$, weil das Quadrat xx in beyden Fällen einerley heraus-kommt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$, und $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, damit herauskomme $xx + acyy = (app + cqq)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdenn aber wird $x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq$ und $x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq$, woraus folgt $x = app - cqq$ und $y = 2pq$. Läßt sich also die Zahl ac auf mehrerley Arten in zwey Factoren zertheilen, so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstlich diese Formel $xx + yy$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$, so nehme man $x = pp - qq$ und $y = 2pq$, so wird $xx + yy = (pp + qq)^2$.

Soll zweytens diese Formel $xx - yy$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = pp + qq$ und $y = 2pq$, da denn $xx - yy = (pp - qq)^2$ wird.

Soll drittens diese Formel $xx + 2yy$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$, so nehme man $x = pp - 2qq$, oder $x = 2pp - qq$ und $y = 2pq$, und denn wird $xx + 2yy = (pp + 2qq)^2$, oder $xx + 2yy = (2pp + qq)^2$.

Soll viertens diese Formel $xx - 2yy$ ein Quadrat werden wo $ac = -2$, so nehme man $x = pp + 2qq$ und $y = 2pq$, da denn kommt $xx - 2yy = (pp - 2qq)^2$.

Soll fünftens diese Formel $x + 6yy$ ein Quadrat werden, wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$,

oder $a = 2$ und $c = 3$; so kann man erstlich setzen $x = pp - 6qq$ und $y = 2pq$, da denn $xx + 6yy = (pp + 6qq)^2$. Hernach kann man auch setzen $x = 2pp - 3qq$ und $y = 2pq$, da denn $xx + 6yy = (2pp + 3qq)^2$.

186.

Sollte aber diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrat gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne wofern nicht schon ein Fall bekannt ist, in welchem diese Formel wirklich ein Quadrat werde. Dieser bekannte Fall sey demnach, wenn $x = f$ und $y = g$, also daß $aff + cgg = hh$; und alsdenn kann unsere Formel in einer andern von dieser Art $tt + acuu$ verwandelt werden, wenn man setzt $t = \frac{afx + cgy}{h}$ und $u = \frac{gx - fy}{h}$; denn da wird

$$tt = \frac{aaffxx + 2acfgxy + ccggyy}{hh}$$

und $uu = \frac{ggxx - 2fgxy + ffyy}{hh}$,

woraus folgt $tt + acuu$

$$= \frac{aaffxx + ccggyy + acggxx + acffyy}{hh}$$

$$= \frac{axx(aff + cgg) + cyy(aff + cgg)}{hh};$$ da nun

$aff + cgg = hh$, so wird $tt + acuu = axx + cyy$; und solchergestalt bekommt die vorgelegte Formel $axx + cyy$ diese Form $tt + acuu$, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann.

187.

Nun wollen wir weiter fortgehen, und zusehen, wie diese Formel $axx + cyy$, wo x und y unter sich untheil-

theilbar seyn sollen, zu einem Cubo gemacht werden könne; wozu die vorigen Regeln keineswegs hinlänglich sind, die hier angebrachte Methode aber mit dem besten Fortgange angewandt werden kann: wobey noch dieses insonderheit zu merken, daß diese Formel allezeit zu einem Cubo gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht angieng, wofern nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potestäten gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten, ꝛc. Potestät, ist die Auflösung immer möglich.

188.

Wenn demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Cubo gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$, denn daraus wird das Product $axx + cyy = (app + cqq)^3$, und also unsere Formel ein Cubus: es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden könne? welches glücklicher weise gelingt; denn wenn die angesetzten Cubi wirklich genommen werden, so erhalten wir diese zwey Gleichungen $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c}$, woraus offenbar folgt, daß $x = ap^3 - 3cpqq$, und $y = 3appq - cq^3$.

Man suche z. E. zwey Quadrate xx und yy, deren Summe $xx + yy$ einen Cubus ausmache: weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir $x = p^3 - 3pqq$ und $y = 3ppq - q^3$, und alsdenn wird $xx + yy$

 $= (pp$

$= (pp + qq)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $xx + yy = 125 = 5^3$.

189.

Wir wollen noch diese Formel betrachten $xx + 3yy$, welche zu einem Cubo gemacht werden soll: weil nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird $x = p^3 - 9pqq$ und $y = 3ppq - 3q^3$, und alsdenn $xx + 3yy = (pp + 3qq)^3$. Weil diese Formel öfters vorkommt wollen wir davon die leichtere Fälle hieher setzen.

p	q	x	y	xx + 3yy
1	1	8	0	64 = 4^3
2	1	10	9	343 = 7^3
1	2	35	18	2197 = 13^3
3	1	0	24	1728 = 12^3
1	3	80	72	21952 = 28^3
3	2	81	30	9261 = 21^3
2	3	154	45	29791 = 31^3

190.

Wäre die Bedingung nicht vorgeschrieben, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn sollen, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: denn wenn $axx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $attzz + cuuzz$ welche dem Cubo $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus sogleich gefunden wird $z = v^3(att + cuu)$; folglich sind die gesuchten Werthe für x und y, $x = tv^3(att + cuu)$ und $y = uv^3(att + cuu)$, welche außer dem Cubo v^3 noch $att + cuu$ zum gemeinen Theiler haben: diese Auflösung giebt so gleich $axx + cyy = v^6(att + cuu)^2(att + cuu) = v^6(att$

+ c

$+ cuu)^3$, welches offenbar der Cubus ist von $v^2(att + cuu)$.

191.

Die hier gebrauchte Methode ist um so viel merkwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu einig und allein rationale und so gar ganze Zahlen erfordert wurden. Noch merkwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen wo die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr statt findet: denn wenn z. E. $xx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen, daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nämlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubos seyn müssen; weil dieselben unter sich untheilbar sind indem die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als wenn z. E. $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr statt finden, weil alsdenn die beyden Factoren nämlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeine Theiler haben könnten, ohngeachtet x und y dergleichen nicht haben, z. E. wenn beyde ungerade Zahlen wären.

Wenn demnach $xx - yy$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig, daß so wohl $x + y$ als $x - y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl setzen $x + y = 2p^3$ und $x - y = 4q^3$, da denn $xx - yy$ unstreitig ein Cubus würde nämlich $8p^3q^3$, davon die Cubicwurzel ist $2pq$: alsdenn aber wird $x = p^3 + 2q^3$, und $y = p^3 - 2q^3$. Wenn aber die Formel $axx + cyy$ sich nicht in zwey rationale Factores zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden.

192.

Wir wollen diese Abhandlung durch einige merkwürdige Fragen erläutern:

I. Frage man verlangt in ganzen Zahlen ein Quadrat xx daß wenn dazu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121, ob aber mehr dergleichen gegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle da $xx + yy$ ein Cubus wird, welches wie aus dem obigen erhellet, geschieht, wenn $x = p^3 - 3pqq$ und $y = 3ppq - q^3$: da nun hier $yy = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß seyn $3ppq - q^3 = +2$ oder $3pqq - q^3 = -2$: im erstern Fall wird also $q(3pp - qq) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey demnach erstlich $q = 1$, so wird $3pp - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$ und $xx = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6pp - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen $+$, so wird $6pp = 10$ und $pp = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde, und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen $-$ so wird $6pp = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadraten gegeben werden, nämlich 4 und 121, welche wenn dazu 4 addirt wird Cubi werden.

193.

II. Frage: Man verlangt solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche, wenn dazu 2 addirt wird Cubi werden, wie bey dem Quadrat 25 geschieht: ob es nun noch mehr dergleichen giebt wird hier gefragt?

Da also $xx + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle, wo die Formel $xx + 2yy$ ein Cubus wird,

wel-

welches aus dem obigen Articul (188), wo $a = 1$ und $c = 2$ geschieht, wenn $x = p^3 - 6pqq$ und $y = 3ppq - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$ so muß seyn $3ppq - 2q^3 = q(3pp - 2qq) = \pm 1$, und also q ein Theiler von 1; es sey demnach $q = 1$, so wird $3pp - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3pp = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt vor p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; woraus folgt, daß nur das einzige Quadrat 25 in ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

194.

III. Frage: Man verlangt solche fünffache Quadrate, wenn dazu 7 addirt wird, daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5xx + 7$ ein Cubus sey?

Man suche erstlich diejenigen Fälle, da $5xx + 7yy$ ein Cubus wird, welches nach dem Articul (188) wo $a = 5$ und $c = 7$ geschieht, wenn $x = 5p^3 - 21pqq$ und $y = 15ppq - 7q^3$: weil nun hier seyn soll $y = \pm 1$, so wird $15ppq - 7q^3 = q(15pp - 7qq) = \pm 1$, da denn q ein Theiler seyn muß von 1, folglich $q = 1$; daher wird $15pp - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q solche Brüche seyn könnten, da $y = 1$ und x doch eine ganze Zahl würde; solches geschieht wirklich, wenn $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$, denn da wird $y = 1$ und $x = 2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195.

IV. Frage: Man suche solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche doppelt genommen wenn davon 5 subtrahirt wird, daß ein Cubus heraus komme; oder $2xx - 5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $2xx - 5yy$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten Artikel, wo $a = 2$ und $c = -5$, geschieht, wenn $x = 2p^3 + 15pqq$ und $y = 6ppq + 5q^3$. Hier aber muß seyn $y = \pm 1$, und folglich $6ppq + 5q^3 = q(6pp + 5qq) = \pm 1$, welches in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmal in Brüchen; daher dieser Fall sehr merkwürdig ist, da gleichwohl eine Auflösung statt findet, wenn nämlich $x = 4$, denn da wird $2xx - 5 = 27$, welches der Cubus ist von 3; und hievon ist es von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196.

Es ist also möglich, daß $2xx - 5yy$ ein Cubus seyn könne dessen Wurzel sogar diese Form hat $2pp - 5qq$, wenn nämlich $x = 4$, $y = 1$ und $p = 2$, $q = 1$, und dernnach haben wir einen Fall wo $2xx - 5yy = (2pp - 5qq)^3$, ungeachtet die beyden Factoren von $2xx - 5yy$ nämlich $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Fall $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, welches keinesweges mit $4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ überein kommt.

Es ist aber zu merken, daß diese Formel $rr - 10ss$ in unendlich viel Fällen 1 oder -1 werden kann; wenn nämlich $r = 3$ und $s = 1$, ferner wenn $r = 19$ und $s = 6$, welche mit dieser Formel $2pp - 5qq$ multiplicirt wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey demnach $ff - 10gg = 1$, und anstatt daß wir oben gesetzt haben $2xx - 5yy = (2pp - 5qq)^3$, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art setzen $2xx - 5yy = (ff - 10gg) \cdot (2pp - 5qq)^3$, und die

die Factores davon genommen geben $x\sqrt{2} \pm y\sqrt{5} = (f \pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber $(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3 = (2p^3 + 15pqq)\sqrt{2} \pm (6ppq + 5q^3)\sqrt{5}$, wofür wir der Kürze halber schreiben wollen $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$, welches mit $f + g\sqrt{10}$ multiplicirt giebt $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$, welches dem $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ gleich seyn muß, woraus entspringet $x = Af + 5Bg$ und $y = Bf + 2Ag$; da nun $y = \pm 1$ seyn muß, so ist nicht unumgänglich nöthig daß $6ppq + 5q^3 = 1$ werde, sondern es ist genug, wenn nur die Formel $Bf + 2Ag$, das ist $f(6ppq + 5q^3) + 2g(2p^3 + 15pqq)$ dem ± 1 gleich werde, wo f und g vielerley Werthe haben können. Es sey z. E. $f = 3$ und $g = 1$, so muß diese Formel $18ppq + 15q^3 + 4p^3 + 30pqq$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß seyn. $4p^3 + 18ppq + 30pqq + 15q^3 = \pm 1$.

197.

Diese Schwierigkeit alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen findet sich aber nur alsdenn, wenn in der Formel $axx + cyy$ die Zahl c negativ ist, weil alsdenn diese Formel $axx + cyy$ oder diese $xx - acyy$, so mit ihr in einer genauen Verwandtschaft stehet, 1 werden kann, welches aber niemals geschehen kann wenn c eine positive Zahl ist, weil $axx + cyy$ oder $xx + acyy$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Daher die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann, wenn die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

198.

Wir kommen also zur vierten Potestät und bemerken zuförderst, daß wenn die Formel $axx + cyy$ ein

ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a = 1$ seyn müsse; denn wenn dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrat zu machen, oder wenn es möglich wäre so könnte dieselbe auch in dieser Form $tt + acuu$ verwandelt werden, daher wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $xx + cyy$ wenn $a = 1$ übereinstimmt, einschränken. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müssen, daß diese Formel $xx + cyy$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus diesen zwey Factoren besteht $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, daher gesetzt werden muß $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4$ und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4$, woraus unsere Formel diesem Biquadrat $(pp + cqq)^4$ gleich wird, die Buchstaben x und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folget:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq - 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq + 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

folglich $x = p^4 - 6cppqq + ccq^4$ und
$y = 4p^3q - 4cpq^3$.

199.

Wenn also $xx + yy$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c = 1$ so haben wir diese Werthe $x = p^4 - 6ppqq + q^4$ und $y = 4p^3y - 4pq^3$ und alsdenn wird seyn $xx + yy = (pp + qq)^4$.

Laßt uns z. E. setzen $p = 2$ und $q = 1$, so bekommen wir $x = 7$ und $y = 24$; hieraus wird $xx + yy = 625 = 5$.

Nimmt

Nimmt man ferner $p = 3$ und $q = 2$, so bekommt man $x = 119$ und $y = 120$, daraus wird $xx + yy = 13^4$.

200.

Bey allen geraden Potestäten wozu die Formel $axx + cyy$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende genug ist daß man nur einen einzigen Fall wisse, wo dieses geschieht; und alsdenn kann diese Formel wie wir oben gesehen haben, in dieser Gestalt verwandelt werden $tt + acuu$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in dieser Form $xx + cyy$ enthalten, angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, sowohl zur sechsten Potestät als einer jeglichen andern noch höhern geraden Potestät gemacht werden kann.

201.

Bey den ungeraden Potestäten aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so kann die Formel $axx + cyy$ allezeit zu einer jeglichen ungeraden Potestät gemacht werden. Denn verlangt man z. E. die fünfte Potestät, so darf man nur setzen $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5$, da denn offenbar wird $axx + cyy = (app + cqq)^5$. Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist $aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c} + 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c}$; woraus sogleich geschlossen wird $x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4$ und $y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5$.

Ver-

Verlangt man also eine Summe von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $y = 41$, und $xx + yy = 3125 = 5^5$.

Capitel 13.

Von einigen Formeln dieser Art $ax^4 + by^4$, welche sich nicht zu einem Quadrat machen lassen.

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadratzahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man sogar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nämlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber wo entweder $y = 0$ oder $y = x$, und in welchen Fällen die Sache offenbar vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so viel mehr merkwürdig, weil wenn nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viel Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemerken, daß die beyden Zahlen x und y als untheilbar unter sich angesehen werden können;

nen; denn sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. d haben, also daß man setzen könnte $x=dp$ und $y=dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4+d^4q^4$ und $d^4p^4-d^4q^4$, welche wenn sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müssen, also daß auch diese Formeln p^4+q^4 und p^4-q^4 Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinen Theiler haben; es ist demnach genug zu beweisen, daß diese Formeln in dem Falle da x und y unter sich untheilbar sind, keine Quadrate werden können, und alsdenn erstreckt sich der Beweis von selbst auf alle Fälle, da auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

204.

Wir wollen demnach von der Summe zweyer Biquadraten nämlich dieser Formel x^4+y^4 den Anfang machen, und wo wir x und y als unter sich untheilbare Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen daß x^4+y^4 außer den obgemeldten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis folgendergestalt geführet.

Wenn jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch x^4+y^4 ein Quadrat würde, dieselben möchten auch so groß seyn als sie wollten, weil in kleinen gewiß keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß wenn auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey gemeldten, welche aber zu keinen andern führen, so kann man sicher schließen, daß auch

in größern, ja sogar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadraten $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir sogleich zeigen wollen.

205.

Um erstlich zu zeigen daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat seyn könne außer den beyden Fällen die für sich klar sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemerken.

I. Nehmen wir an daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind oder keinen gemeinen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ungerade.

II. Beyde aber können nicht ungerade seyn, weil die Summe von zwey ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat seyn kann: denn ein ungerades Quadrat ist allezeit in der Form $4n + 1$ enthalten, und also würde die Summe zweyer ungeraden Quadraten diese Form $4n + 2$ haben, welche sich durch 2 nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses aber gilt auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wenn demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerade, das andere aber ungerade seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß wenn die Summe zweyer Quadraten ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $pp - qq$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde; woraus folget daß seyn müßte $xx = pp - qq$ und $yy = 2pq$ und da würde $x^4 + y^4 = (pp + qq)^2$.

IV. Hier also würde y gerade, x aber ungerade seyn: da nun $xx = pp - qq$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade

gerade seyn: die erstere p aber kann nicht gerade seyn, weil sonst $pp - qq$ als eine Zahl von dieser Form $4n - 1$ oder $4n + 3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerade q aber gerade seyn, wo sich von selbst versteht daß dieselben untheilbar unter sich seyn müssen.

V. Da nun $pp - qq$ ein Quadrat, nämlich dem xx gleich seyn soll, so geschieht dieses wie wir oben gesehen, wenn $p = rr + ss$ und $q = 2rs$: denn da wird $xx = (rr - ss)^2$, und also $x = rr - ss$.

VI. Allein yy muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun haben $yy = 2pq$, so wird jetzt $yy = 4rs(rr + ss)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(rr + ss)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbare Zahlen sind, also daß auch die hier befindlichen drey Factores, r, s, und $rr + ss$, keinen gemeinen Theiler unter sich haben können.

VII. Wenn aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r = tt$ und $s = uu$: so muß auch $t^4 + u^4$ ein Quadrat seyn. Wenn demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so würde auch hier $t^4 + u^4$, das ist ebenfalls eine Summe von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn. Wobey zu merken daß weil hier $xx = (t^4 - u^4)^2$ und $yy = 4ttuu(t^4 + u^4)$, die Zahlen t und u offenbar weit kleiner seyn würden als x und y, indem x und y sogar durch die vierte Potestäten von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müssen.

VIII. Wenn daher zwey Biquadrate als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn soll-

ten, deren Summe ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summe von zwey weit kleineren Biquadraten herleiten, welche ebenfalls ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachmals noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme: da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summe möglich ist, so folgt daraus offenbar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte hier zwar einwenden daß es in den kleinen Zahlen wirklich solche gebe wie schon anfänglich bemerkt worden, nämlich da das eine Biquadrat Nulle wird; allein auf diesen Fall kommt man gewiß nicht, wenn man solchergestalt von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Denn wäre bey der kleineren Summe $t^4 + u^4$, entweder $t = 0$ oder $u = 0$, so würde auch bey der größern Summe nothwendig $yy = 0$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kommt.

206.

Nun kommen wir zu dem andern Hauptsatz, daß auch die Differenz zwischen zwey Biquadraten als $x^4 - y^4$ niemals ein Quadrat werden könne, außer den Fällen $y = 0$ und $y = x$; zu dessen Beweis folgende Punkte zu merken.

I. Sind die Zahlen x und y als untheilbar unter sich anzusehen, und also entweder beyde ungerade oder die eine gerade und die andere ungerade. Da nun in beyden Fällen die Differenz von zweyen Quadraten wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders erwogen werden.

II. Es

II. Es seyn also erstlich die beyden Zahlen x und y ungerade, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerade die andere aber gerade seyn. Nun wird $xx - yy = 4pq$ und $xx + yy = 2pp + 2qq$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq (2pp + 2qq)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq (2pp + 2qq) = 2pq (pp + qq)$, deren Factoren unter sich untheilbar sind: folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, q, und $pp + qq$ für sich ein Quadrat seyn, weil nämlich die eine Zahl p gerade, die andere q aber ungerade ist. Man setze daher um die beyden ersten zu Quadraten zu machen $2p = 4rr$ oder $p = 2rr$, und $q = ss$, wo s ungerade seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4 + s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun $s^4 + 4r^4$ eine Summe von zwey Quadraten ist, davon s^4 ungerade, $4r^4$ aber gerade ist, so setze man die Wurzel des erstern $ss = tt - uu$, wo t ungerade und u gerade ist; des letztern aber $2rr = 2tu$ oder $rr = tu$, wo t und u unter sich untheilbar sind.

IV. Weil nun $tu = rr$ ein Quadrat seyn muß, so muß sowohl t als u ein Quadrat seyn; man setze demnach $t = mm$ und $u = nn$, wo m ungerade und n gerade ist, so wird $ss = m^4 - n^4$ also daß wieder eine Differenz von zwey Biquadraten, nämlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden als x und y, weil r und s offenbar kleiner sind als x und y, und hinwiederum m und n kleiner als r und s; wenn also die Sache in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y^4$ ein

Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort bis man endlich auf die kleinste Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber wo dieses möglich ist, sind wenn das eine Biquadrat gleich o oder dem andern gleich ist: wäre das erstere so müßte seyn $n = o$, folglich $u = o$, ferner $r = o$ und $p = o$ und $x^4 - y^4 = o$, oder $x^4 = y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$, weiter $s = o$, $q = o$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

207.

Man könnte hier einwenden, daß da m ungerade und n gerade ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß machen könnte. Es ist aber genug daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen, und wir werden anjetzo zeigen daß auch $x^4 - y^4$ kein Quadrat seyn könne, wenn das eine Biquadrat gerade und das andere ungerade ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerade und y^4 ungerade, so wäre die Sache an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n + 3$ heraus käme die kein Quadrat seyn kann. Es sey demnach x ungerade und y gerade, so muß seyn $xx = pp + qq$ und $y = 2pq$, denn so wird $x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2$, wo von p und q das eine gerade das andere aber ungerade seyn muß.

II. Da nun $pp + qq = xx$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p = rr - ss$ und $q = 2rs$; folglich $x = rr + ss$. Hieraus aber wird $yy = 2(rr - ss).2rs$

oder

oder $yy = 4rs(rr - ss)$, welches ein Quadrat seyn muß, und also auch der vierte Theil davon nämlich $rs(rr - ss)$, wovon die Factoren unter sich untheilbar sind.

III. Man setze demnach $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr - ss = t^4 - u^4$, welcher ebenfalls ein Quadrat seyn muß; da nun derselbe auch eine Differenz von zwey Biquadraten ist, welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärke, also daß wenn auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadraten ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbare Fälle zu kommen: daher gewiß auch in den größten Zahlen solches nicht möglich ist.

208.

Der erste Theil dieses Beweises da die Zahlen x und y beyde ungerade genommen werden, kann folgender Gestalt abgekürzet werden. Wenn $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte seyn $xx = pp + qq$ und $yy = pp - qq$, wo von den Buchstaben p und q der eine gerade der andere aber ungerade wäre: alsdenn aber würde $xxyy = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz von zwey solchen Biquadraten ist, davon das eine gerade das andere aber ungerade ist: daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theil des Beweises gezeigt worden.

209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summe noch die Differenz zweyer Biqua-

Biquadraten jemals eine Quadratzahl werden könne, außer einigen wenigen offenbaren Fällen.

Wenn demnach auch andere Formeln welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summe oder eine Differenz von zweyen Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind dieselben Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun statt in den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich daß diese Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde: denn weil diese Formel eine Summe von zwey Quadraten ist, so müßte seyn $xx = pp - qq$ und $2yy = 2pq$ oder $yy = pq$; da nun p und q untheilbar unter sich sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man daher $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 - s^4$: also müßte eine Differenz von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich daß diese Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde: denn da müßte seyn $xx = pp + qq$ und $2yy = 2pq$, weil alsdenn heraus käme $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$; da nun $yy = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summe von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welche nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß diese Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdenn y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müssen, welches nach dem vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es

IV. Es ist auch nicht möglich, daß diese Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; denn da dasselbe gerade seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4zz$ wäre, so würde seyn $x^4 + y^4 = 2zz$, und daher $2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$ und also ein Quadrat. Eben so würde seyn $2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$ und also auch ein Quadrat. Da nun sowohl $2zz + 2xxyy$ als $2zz - 2xxyy$ ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4 - 4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4 - x^4y^4$ und also eine Differenz von zwey Biquadraten, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch diese Formel $2x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn; denn da beyde Zahlen x und y nicht gerade sind, weil sie sonsten einen gemeinen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerade und die andere ungerade, weil sonst der eine Theil durch 4 der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbar seyn würde, so müssen beyde ungerade seyn. Setzt man nun $x = p + q$ und $y = p + q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerade die andere aber ungerade, und da:

$2x^4 - 2y^4 = 2(xx + yy)(xx - yy)$, so bekommt man $xx + yy = 2pp + 2qq = 2(pp + qq)$ und $xx - yy = 4pq$; also unsere Formel $16pq(pp + qq)$ deren sechzehnte Theil, nämlich $pq(pp + qq)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factores unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p = rr$ und $q = ss$, so wird der dritte $r^4 + s^4$, welcher auch ein Quadrat seyn müßte: dieses aber ist nicht möglich.

210.

Auf eine gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß diese Formel $x^4 + 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerade seyn, weil alsdenn y ungerade seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2 nicht aber durch 4 würde theilen lassen: daher muß x ungerade seyn.

II. Man setze demnach die Quadratwurzel unserer Formel $= xx + \frac{2pyy}{q}$, damit dieselbe ungerade werde; so wird $x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4pxxyy}{q} + \frac{4ppy^4}{qq}$, wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch yy dividirt und mit qq multiplicirt, geben $4pqxx + 4ppyy = 2qqyy$, oder $4pqxx = 2qqyy - 4ppyy$, daraus wird $\frac{xx}{yy} = \frac{qq-2pp}{2pq}$; woraus folget $xx = qq - 2pp$ und $yy = 2pq$, welche eben die Formeln sind die wir schon oben gegeben haben.

III. Es müßte also $qq - 2pp$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wenn $q = rr + 2ss$ und $p = 2rs$; denn da würde $xx = (rr - 2ss)^2$: hernach aber würde $4rs(rr + 2ss) = yy$, und also müßte auch der vierte Theil $rs(rr + 2ss)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre demnach $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und solcher-

solchergestalt würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie leicht zu probiren ist, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

211.

Was hingegen diese Formel betrifft $x^4 - 2y^4$, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte, und wenn man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können sogar unendlich viel Fälle gefunden werden, da dieselbe wirklich ein Quadrat wird.

Denn wenn $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß seyn werde $xx = pp + 2qq$ und $yy = 2pq$, weil man alsdenn bekommt $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Da nun auch $pp + 2qq$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses wenn $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; denn da wird $xx = (rr + 2ss)^2$. Allein hier ist wohl zu merken, daß dieses auch geschehen würde, wenn man annehme $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, daher zwey Fälle hier in Erwegung zu ziehen sind.

I. Es sey erstlich $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$, so wird $x = rr + 2ss$; und weil $yy = 2pq$, so wird nun seyn $yy = 4rs\,(rr - 2ss)$; und müßten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = tt$ und $s = uu$, so wird $yy = 4ttuu\,(t^4 - 2u^4)$; also $y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; wenn daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch wie vorher nicht schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, deswegen weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen

gelanget; denn $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat seyn ohne auf diese Formel $t^4 - 2u^4$ zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nämlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, so wird zwar wie vorher $xx = rr + 2ss$, allein für y bekommt man $yy = 2pq = 4rs\,(2ss - rr)$. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so bekommt man $yy = 4ttuu\,(2u^4 - t^4)$, folglich $y = 2tu\sqrt{(2u^4 - t^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; woraus erhellet, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wenn diese $2u^4 - {}^4t^4$ ein Quadrat wird. Dieses aber geschieht offenbar, wenn $t = 1$ und $u = 1$; und daher bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2.\ 16 = 49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat werde, wenn $u = 13$ und $t = 1$, weil alsdenn $\sqrt{(2u^4 - t^4)} = 239$. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nämlich $x = 1 + 2.\ 13^4 = 57123$ und $y = 2.\ 13.\ 239 = 6214$.

IV. Sobald man aber Werthe für x und y gefunden, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, da man denn wieder neue für x und y erhalten wird.

Weil wir nun gefunden $x = 3$ und $y = 2$, so laßt uns in der No. I. gegebenen Formel setzen $t = 3$ und $u = 2$, da denn $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$, so bekommen wir folgende neue Werthe $x = 81 + 2.\ 16 = 113$ und $y = 2.\ 3.\ 2.\ 7 = 84$. Hieraus erhalten wir $xx = 12769$, und $x^4 = 163047361$; ferner $yy = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird $x^4 - 2y^4 = 63473089$

wovon

wovon die Quadrat-Wurzel ist 7967, welche auch völlig übereintrifft mit der anfänglich angesetzten $pp-2qq$. Denn da $t=3$ und $u=2$, so wird $r=9$ und $s=4$, daher $p=81-32=49$ und $q=72$, woraus $pp-2qq$ $=2401-10368=-7967$.

Capitel 14.

Auflösung einiger Fragen, die zu diesem Theil der Analytic gehören.

212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytic vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, so hieher gehören aufzulösen, daher wir um dieses in ein grösseres Licht zu setzen einige dergleichen Fragen hier vorlegen und die Auflösung derselben beyfügen wollen.

213.

I. Frage: Man suche eine Zahl, daß wenn man darzu 1 sowohl addirt oder auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Setzt man die gesuchte Zahl $=x$, so muß sowohl $x+1$ als auch $x-1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x+1=pp$, so wird $x=pp-1$ und $x-1=pp-2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man setze, die Wurzel davon sey $p-q$, so wird $pp-2=pp-2pq+qq$, wo sich die pp aufheben und daraus gefunden wird $p=\frac{qq+2}{2q}$; daraus man ferner er-

hält

hält $x = \frac{q^4 + 4}{4qq}$: wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze daher $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4 + 4s^4}{4rrss}$ wovon wir etliche kleinere Werthe anzeigen wollen.

wenn $r =$	1	2	1	3
und $s =$	1	1	2	1
so wird $x =$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

214.

II. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wenn man dazu 2 beliebige Zahlen als z. E. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Es müssen also diese zwey Formeln $x + 4$ und $x + 7$ Quadrate werden; man setze daher für die erstere $x + 4 = pp$, so wird $x = pp - 4$; die andere Formel aber wird $x + 7 = pp + 3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel davon $= p + q$, so wird $pp + 3 = pp + 2pq + qq$, woraus gefunden wird $p = \frac{3 - qq}{2q}$, folglich $x = \frac{9 - 22qq + q^4}{4qq}$.

Setzen wir für q einen Bruch als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4 - 22rrss + r^4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r = 1$ und $s = 1$, so wird $x = -3$, und daraus wird $x + 4 = 1$ und $x + 7 = 4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s = 2$ und $r = 1$, da bekommt man $x = \frac{57}{16}$; woraus wird $x + 4 = \frac{121}{16}$ und $x + 7 = \frac{169}{16}$: will man ferner setzen $s = 3$ und $r = 1$, so bekommt man $x = \frac{133}{9}$,

woraus

woraus $x + 4 = \frac{169}{9}$ und $x + 7 = \frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied das mittlere überwiegen, so setze man $r = 5$ und $s = 1$, da wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{196}{25}$.

215.

III. Frage: Man suche einen solchen Bruch x, daß wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Da diese beyden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1 + x = pp$, da wird $x = pp - 1$ und die andere Formel $1 - x = 2 - pp$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, da solches geschieht, ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nämlich $p = 1$, deswegen setze man $p = 1 - q$, also daß $x = qq - 2q$, so wird unsere Formel $2 - pp = 1 + 2q - qq$, davon setze man die Wurzel $= 1 - qr$, so bekommt man $1 + 2q - qq = 1 - 2qr + qqrr$; hieraus

$2 - q = - 2r + qrr$ und $q = \frac{2r + 2}{rr + 1}$; hieraus wird

$x = \frac{4r - 4r^3}{(rr+1)^2}$, weil r ein Bruch ist, so setze man

$r = \frac{t}{u}$, so wird $x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(tt + uu)^2} = \frac{4tu(uu - tt)}{(tt + uu)^2}$;

also muß u größer seyn als t.

Man setze demnach $u = 2$ und $t = 1$, so wird $x = \frac{24}{25}$; setzt man $u = 3$ und $t = 2$, so wird $x = \frac{120}{169}$, und daraus $1 + x = \frac{289}{169}$ und $1 - x = \frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate sind.

216.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen x, welche sowohl zu 10 addirt als von 10 subtrahirt, Quadrate hervorbringen?

Es müssen also diese Formeln $10+x$ und $10-x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedenke man, daß auch das Product dieser Formel ein Quadrat seyn müsse, nämlich $100-xx$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $=10-px$, so wird $100-xx=100-20px+ppxx$ und also $x=\frac{20p}{pp+1}$: hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eines seyn; nun aber wird die erste $10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$; und weil $pp+2p+1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch dieser Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10pp+10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist, wenn $p=3$ und deswegen setze man $p=3+q$, so bekommt man $100+60q+10qq$; davon setze man die Wurzel $10+qt$, so wird $100+60q+10qq=100+20qt+qqtt$ daraus $q=\frac{60-20t}{tt-10}$, daraus $p=3+q$, und $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Setzt

Setzt man ${}^{3}t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$ folglich $x = 6$, daher wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sey aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{40}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$ und $x = -\frac{234}{25}$: es ist aber gleich viel zu setzen $x = +\frac{234}{25}$, und denn wird $10 + x = \frac{484}{25}$ und $10 - x = \frac{16}{25}$, welche beyde Quadrate sind.

217.

Anmerkung: Wollte man diese Frage allgemein machen, und für eine jegliche gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, also daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung öfters unmöglich werden, nämlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwey Quadraten ist. Aber wir haben schon oben gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwey Quadraten, oder in dieser Form $xx + yy$ enthalten sind.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

die übrigen also, welche gleichfalls bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, nicht können in zwey Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so oft würde auch die Frage unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns setzen $a + x = pp$ und $a - x = qq$, und da giebt die Addition $2a = pp + qq$; also daß $2a$ eine Summe von zwey Quadraten seyn muß, ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn, wenn daher a keine Summe von zwey Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate seyn können.

218.

Wenn demnach $a = 3$ wäre, so würde die Frage unmöglich seyn, und das deswegen, weil 3 keine Summe

von

von zwey Quadraten ist: man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, denn wäre $3=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}$ und man multiplicirte mit qqss, so würde $3qqss=ppss+qqrr$, wo $ppss+qqrr$ eine Summe von zwey Quadraten ist, welche sich durch 3 theilen ließe: wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine anderen Theiler haben könne, als welche selbst solche Summen sind.

Es lassen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nämlich $9=3^2+0^2$, und $45=6^2+3^2$, welches hier nicht statt findet: daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten ist, solches auch nicht in Brüchen geschehen könne; ist aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten seyn, welches wir zeigen wollen.

219.

V. Frage: Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten ist, auf unendlich vielerley Art in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen?

Die vorgegebene Zahl sey demnach $ff+gg$ und man soll zwey andere Quadraten, als xx und yy suchen, deren Summe $xx+yy$ gleich sey der Zahl $ff+gg$, also daß $xx+yy=ff+gg$. Hier ist nun so gleich klar, daß wenn x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müsse als g. Man setze daher $x=f+pz$ und $y=g-qz$, so wird

ff+2

$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg$, wo sich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen lassen. Daher wird $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$ oder $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{pp + qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden $x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}$ und $y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, also daß $f = 1$ und $g = 1$ so wird $xx + yy = 2$, wenn $x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq}$ und $y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq}$: setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

220.

VI. Frage: Wenn die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten ist, solche Zahlen x zu finden, daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde?

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze $13 + x = pp$ und $13 - x = qq$, so giebt erstlich die Addition $26 = pp + qq$, die Subtraction, aber $2x = pp - qq$: also müssen p und q so beschaffen seyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nämlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für pp, das kleinere aber für qq genommen wird. Hieraus bekommt man erstlich $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unend-

lich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelöst werden. Denn weil $f=5$ und $g=1$, wenn wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben p und q schreiben t und u, vor x und y aber die Buchstaben p und q, so finden wir $p=\frac{2tu+5(uu-tt)}{tt+uu}$ und $q=\frac{10tu+tt-uu}{tt+uu}$. Nimmt man nun für t und u Zahlen nach Belieben an, und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x=\frac{pp-qq}{2}$.

Es sey z. E. $t=2$ und $u=1$, so wird $p=\frac{11}{5}$ und $q=\frac{23}{5}$; und daher $pp-qq=\frac{408}{25}$ und $x=\frac{204}{25}$.

221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a=cc+dd$, die gesuchte aber $=z$, also daß diese Formeln $a+z$ und $a-z$ Quadrate werden sollten.

Nun setze man $a+z=xx$ und $a-z=yy$, so wird erstlich $2a=2(cc+dd)=xx+yy$, und hernach $2z=xx-yy$. Es müssen also die Quadrate xx und yy so beschaffen seyn, daß $xx+yy=2(cc+dd)$, wo $2(cc+dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nämlich $(c+d)^2+(c-d)^2$. Man setze Kürze halber $c+d=f$ und $c-d=g$: also daß seyn muß $xx+yy=ff+gg$, dieses geschieht aber aus dem obigen, wenn man nimmt $x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$ und $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$, hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wenn man nimmt $p=1$ und $q=1$, denn daraus wird $x=\frac{2g}{2}=g=c-d$ und y

$=f=$

$= f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar $cc + dd + 2cd = (c+d)^2$ und $cc + dd - 2cd = (c-d)^2$. Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{-c-7d}{5}$, und $y = \frac{7c+d}{5}$, wo so wohl c und d, als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer seyn soll als y, so nehme man d negativ, und da wird $x = \frac{c+7d}{5}$ und $y = \frac{7c-d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, welcher Werth zu $a = cc + dd$ addirt giebt $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, wovon die Quadratwurzel ist $\frac{c+7d}{5}$. Subtrahirt man aber z von a, so bleibt $\frac{49cc - 14cd + dd}{25}$, wovon die Quadratwurzel ist $\frac{7c-d}{5}$; jene ist nämlich x, diese aber y.

222.

VII. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wenn so wohl zu derselben selbst als zu ihrem Quadrat xx, eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese beyde Formeln $x + 1$ und $xx + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze daher für die erste $x + 1 = pp$, so wird $x = pp - 1$, und die zweyte Formel $xx + 1 = p^4 - 2pp + 2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: dieselbe aber ist von der Art, daß keine Auflösung zu finden, wofern nicht schon ein

Fall bekannt ist; ein solcher Fall aber fällt so gleich in die Augen, nämlich wo $p = 1$. Man setze daher $p = 1 + q$, so wird $xx + 1 = 1 + 4qq + 4q^3 + q^4$, welches auf vielerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann.

I. Man setze erstlich die Wurzel davon $1 + qq$, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 2qq + q^4$, daraus wird $4q + 4qq = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1 - qq$, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 2qq + q^4$, und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + qq$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1 - 2q - qq$, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1 + 2qq$, da wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^4$, und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$; folglich $x = \frac{40}{9}$, woraus folgt $x + 1 = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$ und $xx + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$.

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen z. E. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner setzen $q = -\frac{1}{2} + r$; daraus aber würde $p = \frac{1}{2} + r$; $pp = \frac{1}{4} + r + rr$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$, folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr$

$-\frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und daher auch mit 16 multiplicirt, nämlich $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$. Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4rr$, also daß $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr \pm 8fr^3 + 16r^4$
$+ffrr.$
Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht, wenn $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$; alsdenn geben die übrigen Glieder durch rr dividirt $-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = (\frac{31}{20})^2$, und $xx + 1 = (\frac{689}{400})^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + ff - 8fr$, und daraus $r = \frac{ff - 32}{32 + 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entspringt.

III. Es sey die Wurzel $4rr + 4r \pm 5$, also daß $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40rr \pm 40r + 25$: wo die zwey ersten und
$+16rr$
die ganz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder $-24r - 24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zeichen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das ist $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gedacht haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

 IV. Man

IV. Man setze die Wurzel $5 + fr + grr$ und bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + 10grr + 2fgr^3 + ggr^4,$
$+ ffrr$

so wird erstlich $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$,

ferner $-8 = 10g + ff$, und also $g = \frac{-8-ff}{10}$,

oder $g = -\frac{344}{250} = -\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32 + 16r = 2fg$

$+ ggr$ und daraus $r = \frac{2fg-32}{16-gg}$. Hier wird der

Zehler $2fg - 32 = \frac{+24.172 - 32.625}{5.125} = \frac{-32.496}{625}$,

oder dieser Zehler $= \frac{-16.32.31}{625}$; der Nenner aber

giebt $16 - gg = (4-g)(4+g) = \frac{328}{125} \cdot \frac{672}{125}$, oder

$16 - gg = \frac{8.32.41.21}{25.625}$; daraus wird $r = -\frac{1550}{861}$,

hieraus $p = -\frac{2739}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nämlich $x = pp - 1$, gefunden.

223.

VIII. Frage: Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt ein Quadrat hervorbringe?

Es müssen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nämlich $x + a$, $x + b$, und $x + c$.

Man setze für die erstere $x + a = zz$, also daß $x = zz - a$, so werden die beyden andern Formeln $zz + b - a$ und $zz + c - a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll.

Hier-

Hiervon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr öfters unmöglich ist, und die Möglichkeit beruhet einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b - a$, und $c - a$. Denn wäre z. E. $b - a = 1$ und $c - a = -1$, das ist $b = a + 1$ und $c = a - 1$, so müßten $zz + 1$ und $zz - 1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze daher $z = \frac{p}{q}$, so würden diese zwey Formeln Quadrate seyn müssen, $pp + qq$ und $pp - qq$, folglich müßte auch ihr Product, nämlich $p^4 - q^4$, ein Quatrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey ist oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b - a = 2$, und $c - a = -2$, das ist $b = a + 2$ und $c = a - 2$, so müßten, wenn man wiederum setzte $z = \frac{p}{q}$, diese zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp - 2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product $p^4 - 4q^4$, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, so müssen diese Formeln Quadrate seyn $pp + mqq$ und $pp + nqq$; welches wie wir eben gesehen unmöglich ist, wenn entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wenn $m = +2$ und $n = -2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich, wenn $m = ff$ und $n = -ff$. Denn alsdenn würde das Product derselben $p^4 - f^4q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten seyn, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben so, wenn $m = 2ff$ und $n = -2ff$, so können auch diese Formeln $pp + 2ffqq$ und $pp - 2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich wenn man setzt

 fq=

$fq = r$, diese Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, also daß diese Formeln $pp + qq$ und $pp + 2qq$ Quadrate seyn müßten, so setze man $pp + qq = rr$ und $pp + 2qq = ss$; da wird aus der ersteren $pp = rr - qq$, und also die andere $rr + qq = ss$: daher müßte so wohl $rr - qq$ als $rr + qq$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun zur Gnüge, daß es nicht leicht ist, solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einige Mittel solche Werthe für m und n zu finden ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder solcher Gestalt ausfündig mache.

Man setzt $ff + mgg = hh$ und $ff + ngg = kk$, so bekommt man aus der erstern $m = \frac{hh - ff}{gg}$ und aus der andern $n = \frac{kk - ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n solche Werthe, da die Auflösung möglich ist.

Es sey z. E. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Anjetzt sind wir versichert, daß es möglich sey die zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten zu machen, weil solches geschieht, wenn $p = 1$ und $q = 2$. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat wenn $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; denn da wird $pp + 2qq = (rr + 2ss)^2$. Die andere Formel aber wird alsdenn $pp + 6qq = r^4 + 20rrss + 4s^4$, wovon ein Fall bekannt ist, da dieselbe ein Quadrat wird, nämlich wenn $p = 1$ und $q = 2$,

und

und welches geschieht wenn $r = 1$ und $s = 1$, oder wenn überhaupt $r = s$; denn da wird unsere Formel $25 s^4$. Da wir nun diesen Fall wissen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $rr = ss + 2st + tt$ und $r^4 = s^4 + 4s^3 t + 6ss tt + 4st^3 + t^4$; daher unsere Formel seyn wird $25s^4 + 44s^3 t + 26 ss tt + 4 st^3 + t^4$, davon sey die Wurzel $5ss + fst + tt$, wovon das Quadrat ist $25s^4 + 10 fs^3 t + 10 ss tt + 2fst^3 + ffsstt + t^4$, wo sich die ersten und letzten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geschieht, wenn $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdenn geben die übrigen durch sst dividirt diese Gleichung $44 s + 26 t = 10 fs + 10 t + fft = 20 s + 14t$, oder $2s = - t$ und $\frac{s}{t} = - \frac{1}{2}$, daher wird $s = - 1$ und $t = 2$, oder $t = - 2s$, folglich $r = - s$ und $rr = ss$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $44 = 10 f$, oder $f = \frac{22}{5}$; da denn die übrigen Glieder durch stt dividirt geben $26 s + 4t = 10 s + ffs + 2ft$, das ist $- \frac{84}{25} s = \frac{24}{5} t$, folglich $t = - \frac{7}{10} s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10} s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$: daher $r = 3$, und $s = 10$: hieraus bekommen wir $p = 2ss - rr = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln werden: $pp + 2qq = 43681 = 209^2$, und $pp + 6qq = 58081 = 241^2$.

224.

Anmerkung: Dergleichen Zahlen für m und n, da sich unsere Formeln zu Quadraten machen lassen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden.

Es ist aber zu merken, daß die Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey diese Verhältniß wie a zu b, und man setze m = a z und n = b z, so kommt es nun darauf an, wie man z bestimmen soll, daß diese beyde Formeln pp + az qq und pp + bz qq zu Quadraten gemacht werden können? welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

225.

IX. Frage: Wenn a und b gegebene Zahlen sind; die Zahl z zu finden, daß sich diese beyde Formeln pp + azqq und pp + b zqq zu Quadraten machen lassen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen?

Man setze pp + azqq = rr und pp + bzqq = ss, und man multiplicire die erstere mit b die andere aber mit a, so giebt die Differenz derselben diese Gleichung $(b-a)pp = brr - ass$ und also $pp = \frac{brr-ass}{b-a}$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß. Da nun solches geschieht, wenn r = s, so setze man um die Brüche weg zu bringen $r = s + (b-a)t$, so wird $pp = \frac{brr-ass}{b-a} = \frac{bss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt-ass}{b-a}$ $= \frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a} = ss + 2bst + b(b-a)tt$. Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird $pp = ss + \frac{2x}{y}.st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt$; wo sich die ss aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit yy multiplicirt geben; $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, daraus $t = \frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$, daher

daher $\frac{t}{s} = \frac{2xy - 2byy}{b(b-a)yy - xx}$. Hieraus bekommt man $t = 2xy - 2byy$ und $s = b(b-a)yy - xx$; ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, und daraus $p = s + \frac{x}{y}$. $t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy$. Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so ist noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu diesem Ende die erste Gleichung $pp + azqq = rr$ von der andern $pp + bzqq = ss$, so giebt der Rest $zqq(b-a) = ss - rr = (s+r).(s-r)$. Da nun $s + r = 2(b-a)xy - 2xx$ und $s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$; oder $s + r = 2x((b-a)y - x)$ und
$s - r = 2(b-a)y(by-x)$, so wird
$(b-a)zqq = 2x((b-a)y-x).\ 2(b-a)y(by-x)$
oder $zqq = 2x((b-a)y-x).\ 2y(by-x)$ oder
$zqq = 4xy((b-a)y-x)(by-x)$; folglich

$$z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}.$$

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, dadurch sich der Zähler theilen läßt: für p aber haben wir schon gefunden $p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy$, woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wenn man setzet: $x = v + by$ oder $x - by = v$: denn da wird $p = vv - abyy$, und $z = \frac{4(v+by).y.v(v+ay)}{qq}$ oder

$$z = \frac{4vy(v+ay)(v+ay)}{qq};$$

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdenn findet man erstlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, so in dem Zähler enthalten ist, woraus sich so denn z ergiebt; da denn $m = az$ und $n = bz$, endlich aber

$p = vv$

$p = vv - abyy$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln.

I. $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy (v + ay)(v + by)$, welche ein Quadrat ist, davon die Wurzel $r = - vv - 2avy - abyy$ ist.

II. Die zweyte Formel aber wird $pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy (v + ay)(v + by)$, welches auch ein Quadrat ist, davon die Wurzel $s = - vv - 2bvy - abyy$: wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können: dieses wird dienlich seyn mit einigen Exempeln zu erläutern.

226.

I. Exempel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z also daß diese zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können? die erstere nämlich $= rr$, und die andere $= ss$.

Hier wird $p = vv + yy$ und man hat also um z zu finden diese Formel zu betrachten $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, da wir denn für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folget.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
v - y	1	1	3	1	7	7
v + y	3	5	5	9	25	9
zqq	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
qq	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadraten gemacht werden können.

I. Können diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, welches geschieht wenn $p = 5$ und $q = 2$. Denn da wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 30\,qq$ und $pp + 30\,qq$, welches geschieht wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn da wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 15\,qq$ und $pp + 15\,qq$, welches geschieht wenn $p = 17$ und $q = 4$, denn da wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 5\,qq$ und $pp + 5\,qq$, welches geschieht wenn $p = 41$ und $q = 12$, denn da wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 7\,qq$ und $pp + 7\,qq$, welches geschieht wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn da wird die erste $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die andere $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 14\,qq$ und $pp + 14\,qq$: welches geschieht wenn $p = 65$ und $q = 12$: denn da wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$ und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227.

II. Exempel: Wenn die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie $1:2$, das ist wenn $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 2zqq$ zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig hier die obigen zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Exempel kann sogleich auf das vorige gebracht werden. Denn setzt man $pp + zqq = rr$ und $pp + 2zqq = ss$, so bekommt man aus der erstern $pp = rr - zqq$ welcher Werth für pp in der zweyten gesetzt giebt $rr + zqq = ss$; folglich müssen diese zwey Formeln $rr - zqq$ und $rr + zqq$ zu Quadraten gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Exempels ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe 6, 30, 15, 5, 7, 14, rc.

Eine solche Verwandelung kann auch allgemein angestellt werden. Wenn wir annehmen, daß diese zwey Formeln $pp + mqq$ und $pp + nqq$ zu Quadraten gemacht werden können, so laßt uns setzen $pp + mqq = rr$ und $pp + nqq = ss$, so giebt die erstere $pp = rr - mqq$, und also die zweyte $ss = rr - mqq + nqq$ oder $rr + (n-m)qq = ss$; wenn daher die ersteren Formeln möglich sind, so sind auch diese $rr - mqq$ und $rr + (n-m)qq$ möglich; und da wir m und n unter sich verwechseln können, so sind auch diese möglich $rr - nqq$ und $rr + (m-n)qq$: sind aber jene Formeln unmöglich so sind auch diese unmöglich.

228.

III. Exempel: Es seyn die Zahlen m und n wie $1:3$, oder $a = 1$ und $b = 3$, also $m = z$ und $n = 3z$,

so

so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 3zqq$ zu Quadraten gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$, so wird die Sache möglich so oft $zqq = 4vy(v + y)(v + 3y)$, und $p = vv - 3yy$. Man nehme daher für v und y folgende Werthe.

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
qq	16	4.9	4.4	4.9.25.4.	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z=2$, daraus wir auf zweyerley Art diese Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten machen können, erstlich geschieht dieses wenn $p=2$ und $q=4$, folglich auch wenn $p = 1$ und $q = 2$; denn da wird $pp + 2qq = 9$ und $pp + 6qq = 25$. Hernach geschieht es auch wenn $p = 191$ und $q = 60$, denn da wird $pp + 2qq = (209)^2$ und $pp + 6qq = (241)^2$. Ob aber nicht auch seyn könnte $z = 1$? welches geschehen würde wenn für zqq ein Quadrat heraus käme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun diese Frage erörtern, ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229.

Man soll also untersuchen ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden

den können oder nicht? Man setze $pp + qq = rr$ und $pp + 3qq = ss$, so sind folgende Puncte zu bedenken:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl seyn; denn da würde q ungerade, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; daher ist p nothwendig ungerade, und pp eine Zahl von dieser Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerade ist, so muß aus der ersten Form q nicht nur gerade, sondern sogar durch 4 theilbar seyn, damit qq eine Zahl werde von dieser Art $16n$; und $pp + qq$ von dieser Art $8n + 1$.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; denn da würde pp sich durch 9 theilen lassen qq aber nicht, folglich 3qq nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $pp + 3qq$ durch 3 nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, daher pp von der Art $3n + 1$ seyn wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen lassen: denn wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre qq eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, und daher $pp + qq$ von dieser Art $3n + 2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; denn wäre dieses, so wäre q nicht durch 5 theilbar und

qq

qq eine Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$, also $3qq$ eine Zahl von der Art $5n+3$ oder $5n+2$, und von welcher Art auch $pp+3qq$ seyn würde, also könnte diese Formel kein Quadrat seyn; daher denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also pp eine Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen lasse oder nicht? Wäre q nicht theilbar durch 5, so wäre qq von dieser Art $5n+2$ oder $5n+3$, wie wir gesehen haben, und da pp entweder $5n+1$ oder $5n+4$, so würde $pp+3qq$ seyn entweder $5n+1$ oder $5n+4$ eben wie pp; es sey $pp=5n+1$, so müßte seyn $qq=5n+4$, weil sonst $pp+qq$ kein Quadrat seyn könnte: alsdenn aber wäre $3qq=5n+2$, und $pp+3qq=5n+3$; welches kein Quadrat seyn kann; wäre aber $pp=5n+4$, so müßte seyn $qq=5n+1$ und $3qq=5n+3$ folglich $pp+3qq=5n+2$, welches auch kein Quadrat seyn kann: woraus folget daß qq durch 5 theilbar seyn müsse.

VIII. Da nun q erstlich durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn $4.3.5m$, oder $q=60m$; daher unsere Formeln seyn würden $pp+3600mm=rr$ und $pp+10800mm=ss$: da denn die erste von der zweyten subtrahirt giebt $7200mm=ss-rr=(s+r)(s-r)$; also daß $s+r$ und $s-r$ Factores seyn müssen von $7200mm$: wobey zu merken daß sowohl s als r ungerade Zahlen seyn müssen, und dabey unter sich untheilbar.

IX. Es sey demnach $7200mm = 4fg$ oder die Factores davon $2f$ und $2g$, und man setze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, so wird $s = f + g$, und $r = f - g$; da denn f und g unter sich untheilbar seyn müssen, und die eine gerade und die andere ungerade. Da nun $fg = 1800mm$, so muß man $1800mm$ in zwey Factores zerlegen, deren einer gerade, der andere aber ungerade sey, beyde aber unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu merken, daß da $rr = pp + qq$ und also r ein Theiler von $pp + qq$, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zwey Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerade, in der Form $4n + 1$ enthalten seyn müsse.

XI. Nehmen wir erstlich an $m = 1$, so wird $fg = 1800 = 8 . 9 . 25$, woraus folgende Zerlegungen entspringen; $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus dem ersten wird $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; daher die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schließen kann, daß der größere Factor ungerade, der kleinere aber gerade seyn müsse; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 . 225$, daher nimmt man $f = 225$ und $g = 32$, also daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine Summe von zwey Quadraten ist und also verdienet probirt zu werden: da nun $q = 120$ und

$r = 193$,

$r = 193$, so wird weil $pp = rr - qq = (r+q).(r-q)$, also $r + q = 313$ und $r - q = 73$, also sieht man wohl daß für pp kein Quadrat heraus komme, weil diese Factoren nicht Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergebens seyn, wie wir noch zeigen wollen.

230.

Lehrsatz. Es ist nicht möglich, daß diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewiß keines.

Welches also bewiesen wird.

Da p ungerade und q gerade ist, wie wir gesehen haben, so kann $pp + qq$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2rs$ und $p = rr - ss$; die andere aber $pp + 3qq$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2tu$ und $p = tt - 3uu$ oder $p = 3uu - tt$. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber $t = ac$ und $u = bd$, so wird für die erstere $p = aabb - ccdd$, für die andere aber $p = aacc - 3bbdd$, oder $p = 3bbdd - aacc$, welche beyde Werthe einerley seyn müssen; daher wir bekommen entweder $aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, oder $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$: wobey zu merken daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müssen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders erwegen; aus dem erstern erhalten wir $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$ oder $bb(aa+3dd) = cc(aa+dd)$, daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa+dd}{aa+3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat

seyn muß. Hier kann aber der Zehler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz darzwischen 2dd ist. Sollte daher 2 ein gemeiner Theiler seyn, so müßte sowohl $\frac{aa+dd}{2}$ als auch $\frac{aa+3dd}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerade und also ihre Quadrate von der Form 8n + 1, daher die letztere Formel $\frac{aa+3dd}{2}$ diese Form 4n + 2 haben wird und kein Quadrat seyn kann: folglich kann 2 kein gemeiner Theiler seyn, sondern der Zehler aa + dd und der Nenner aa + 3dd sind unter sich untheilbar; daher ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß wenn die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleichen Formeln Quadrate seyn würden, und so könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, so kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieser Schluß ist aber nur in sofern richtig, als auch der obige zweyte Fall $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ auf dergleichen führt: hieraus aber wird $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, oder $aa(bb+cc) = dd(3bb+cc)$, und daher $\frac{aa}{dd} = \frac{bb+cc}{3bb+cc} = \frac{cc+bb}{cc+3bb}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß, also daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; indem wenn es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da pp + qq und pp + 3qq Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

231.

XII. Frage: Man soll drey solche Zahlen finden x, y und z, so daß wenn je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy+1$; II. $xz+1$; III. $yz+1$:

Man setze vor die beyden leztern $xz+1=pp$ und $yz+1=qq$, so findet man daraus $x=\frac{pp-1}{z}$ und $y=\frac{qq-1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit zz multiplicirt, das ist $(pp-1)(qq-1)+zz$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Denn setzt man die Wurzel davon $=z+r$, so bekommt man $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, und daher $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sey z. E. $r=-pq-1$, so wird $rr=ppqq+2pq+1$ und $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}$, folglich $x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}$, und $y=\frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}$.

Will man aber ganze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy+1=pp$ und nehme $z=x+y+q$, so wird die zweyte Formel $xx+xy+xq+1=xx+qx+pp$; die dritte aber wird

$xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp$, welche offenbar Quadrate werden, wenn man nimmt $q = \pm 2p$; denn da wird die zweyte $xx \pm 2px + pp$ davon die Wurzel ist $x \pm p$, die dritte aber wird $yy \pm 2py + pp$ davon die Wurzel ist $y \pm p$; daher haben wir diese sehr nette Auflösung: $xy + 1 = pp$ oder $xy = pp - 1$, welches für eine jede Zahl, so für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Exempel erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $pp - 1 = 8$: nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$: und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p = 4$, so wird $pp - 1 = 15$: nun nehme man $x = 5$, und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$: und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p = 5$, so wird $pp - 1 = 24$: nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$: woraus folgende Zahlen entspringen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232.

XIII. Frage: Man suche drey ganze Zahlen x, y und z, so daß wenn zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedes mal ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese drey Formeln Quadrate werden I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = pp$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte $xx + xy + xq + a = xx + xq + pp$ und die dritte $xy + yy + yq + a = yy + qy + pp$, welche beyde Quadrate werden, wenn

wenn $q = \pm 2p$; also daß $z = x + y \pm 2p$, und daher für z zwey Werthe gefunden werden können.

233.

XIV. Frage: Man verlangt vier ganze Zahlen x, y, z und v, so daß wenn zum Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$; IV. $xv + a$; V. $yv + a$; VI. $zv + a$. Nun setze man vor die erste $xy + a = pp$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und bleibt also nur noch die sechste übrig, welche seyn wird $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, welche ein Quadrat seyn muß. Da nun $pp = xy + a$, so wird diese letzte Formel $xx - 2xy + yy - 3a$, folglich müssen noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden I. $xy + a = pp$ und II. $(x - y)^2 - 3a$. Von der letztern sey die Wurzel $(x - y) - q$, so wird $(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + qq$, und da wird $-3a = -2q(x - y) + qq$ und folglich $x - y = \frac{qq + 3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{qq + 3a}{2q}$; hieraus wird $pp = yy + \frac{qq + 3a}{2q} y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + rr = \frac{qq + 3a}{2q} y + a$, oder $4qry + 2qrr = (qq + 3a)y + 2aq$, oder $2qrr - 2aq = (qq + 3a)y - 4qry$ und $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq + 3a - 4qr}$, wo q und r nach Be-

lieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß vor x und y ganze Zahlen heraus kommen. Denn weil $p = y + r$ so werden auch z und v ganz seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo die Sache mit den ganzen Zahlen noch einige Schwierigkeit haben könnte; allein es ist zu bemerken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränkt worden, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem dieselben nothwendig noch viel andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Ende über diese Frage folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wenn $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = pp - a$, so müssen die Zahlen x und y immer in dieser ähnlichen Form $rr - ass$ enthalten seyn: wenn wir demnach setzen $x = bb - acc$ und $y = dd - aee$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z = ff - agg$ und nehmen die Zahlen f und g also an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch diese Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch diese Brüche vorstellen $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, welche demnach also beschaffen seyn müssen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch aus-

ausgedrückt werde, dessen Zehler = 1. Denn da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$ so muß dessen Zehler, wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gemeldte Bedingung statt finde.

Es sey z. E. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine Art bestimmen; denn da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so muß seyn $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e + \frac{e-1}{2}$. Man nehme daher $\frac{e-1}{2} = m$ oder $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser zweyter Bruch wird seyn $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruch der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Exempel beyfügen wollen.

$\frac{b}{c} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} =$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es ganz leicht dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu

zu finden, welcher mit den beyden erstern in gleicher Verhältniß steht. Man darf nur setzen f = b + d und g = c + e, also daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, denn da aus den zwey ersten ist be − cd = ± 1 so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{cc+ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten

$$\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ee+ce} = \frac{\pm 1}{ce+ee}.$$

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus sogleich unsere Frage für drey Zahlen x, y und z auflösen, also daß diese drey Formeln xy + a, xz + a und yz + a Quadrate werden. Denn man darf nur setzen x = bb − a cc, y = dd − a ee und z = ff − a gg. Man nehme z. E. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$, so wird $\frac{f}{e} = \frac{12}{7}$; woraus man erhält x = 25 − 9a y = 49 − 16a und z = 144 − 49a; denn da wird xy + a = 1225 − 840a + 144aa = $(35 - 12a)^2$; ferner wird xz + a = 3600 − 2520a + 441aa = $(60 - 21a)^2$ und yz + a = 7056 − 4704a + 784aa = $(64 - 28a)^2$.

234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten

ten hinzufügen. Es seyn demnach die drey erstere $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältniß stehe: wenn man nun nimmt $x = bb - aa\,cc$; $y = dd - a\,ee$; $z = ff - a\,gg$ und $v = hh - a\,kk$, so werden schon folgende Bedingungen erfüllt: I. $xy + a = \square$ (*); II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$; IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$; es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbst nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältnisse steht. Es ist demnach nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beyzubehalten, und dieselbe also zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme demnach aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ und $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x = 9 - 4a$ und $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$ also $xv + a =$
$9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2$
$-9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$ oder $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288mm + 538m + 243) + 4aa(4m+4)^2$, welche leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann, weil mm mit einem Quadrat multiplicirt ist; wobey wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man

(*) $\square$ deutet hier allenthalben eine Quadratzahl an.

VII. Man kann auch solche Brüche dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen: denn es sey $\frac{b}{c} = \frac{1}{1}$, $\frac{d}{e} = \frac{nl-1}{n}$; so wird $\frac{f}{g} = \frac{nl+l-1}{n+1}$ und $\frac{g}{k} = \frac{2nl+l-2}{2n+1}$; man setze für den letzten $2n+1 = m$, so wird derselbe $\frac{lm-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x = ll - a$ und aus dem letzten $v = (lm-2)^2 - amm$. Also ist nur noch übrig, daß $xv + a$ ein Quadrat werde. Da nun $v = (ll-a)mm - 4lm + 4$ und also $xv + a = (ll-a)^2 mm - 4(ll-a)lm + 4ll - 3a$, welches ein Quadrat seyn muß; davon setze man nun die Wurzel $(ll-a)m - p$, wovon das Quadrat $(ll-a)^2 mm - 2(ll-a)mp + pp$, woraus wir erhalten, $-4(ll-a)lm + 4ll - 3a = -2(ll-a)mp + pp$ und $m = \frac{pp-4ll+3a}{(ll-a)(2p-4l)}$. Man nehme $p = 2l + q$, so wird $m = \frac{4lq+qq+3a}{2q(ll-a)}$, wo für l und q beliebige Zahlen genommen werden können.

Wäre z. E. $a = 1$, so nehme man $l = 2$, da wird $m = \frac{4q+qq+3}{6q}$: setzt man $q = 1$, so wird $m = \frac{4}{3}$ und $m = 2n+1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortschreiten.

235.

XV. Frage: Man verlangt drey solche Zahlen x, y und z, daß so wohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde?

Es müssen also die folgenden sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $x + y$; II. $x + z$; III. $y + z$; IV. $x - y$; V. $x - z$; VI. $y - z$. Man fange bey den drey letzten an, und setze $x - y = pp$, $x - z = qq$ und $y - z = rr$, so bekommen wir aus den beyden letzten $x = qq + z$ und $y = rr + z$, daher die erstere giebt $x - y = qq - rr = pp$, oder $qq = pp + rr$, also daß die Summe der Quadraten $pp + rr$ ein Quadrat seyn muß, nämlich qq, welches geschieht wenn $p = 2ab$ und $r = aa - bb$, denn da wird $q = aa + bb$. Wir wollen aber inzwischen die Buchstaben p, q und r beybehalten, und die drey erstern Formeln betrachten, da denn erstlich $x + y = qq + rr + 2z$; zweytens $x + z = qq + 2z$; drittens $y + z = rr + 2z$. Man setze für die erstere $qq + rr + 2z = tt$, so ist $2z = tt - qq - rr$: daher denn noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen $tt - rr = \square$ und $tt - qq = \square$, das ist $tt - (aa - bb)^2 = \square$ und $tt - (aa + bb)^2 = \square$, welche diese Gestalten annehmen, $tt - a^4 - b^4 + 2aabb$ und $tt - a^4 - b^4 - 2aabb$: weil nun sowohl $cc + dd + 2cd$ als $cc + dd - 2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man daß wir unsern Endzweck erreichen, wenn wir $tt - a^4 - b^4$ mit $cc + dd$ und $2aabb$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerkstelligen, so lasset uns setzen $cd = aabb = ffgghhkk$ und nehmen $c = ffgg$ und $d = hhkk$; $aa = ffhh$ und $bb = ggkk$ oder $a = fh$ und $b = gk$, woraus die erstere Gleichung $tt - a^4 - b^4 = cc + dd$ diese Form erhält $tt - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4$ und also $tt = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4$, das ist $tt = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$ welches Product also ein Quadrat seyn muß, davon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen daher die Sache auf eine andere Art angreifen, und aus den drey erstern Gleichungen $x - y = pp$;

$= pp$; $x - z = qq$; $y - z = rr$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche seyn werden $y = x - pp$ und $z = x - qq$, also daß $qq = pp + rr$. Nun werden die ersten Formeln $x + y = 2x - pp$, $x + z = 2x - qq$; und $y + z = 2x - pp - qq$; vor diese letzte setze man $2x - pp - qq = tt$, also daß $2x = tt + pp + qq$ und nur noch diese Formeln $tt + qq$ und $tt + pp$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber seyn muß $qq = pp + rr$, so setze man $q = aa + bb$, und $p = aa - bb$ so wird $r = 2ab$; woraus unsere Formeln seyn werden:

I. $tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$ II. $tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square$.

Vergleichen wir nun hier wiederum $tt + a^4 + b^4$, mit $cc + dd$, und $2aabb$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck: wir setzen demnach wie oben $c = ffgg$, $d = hhkk$ und $a = fh$, $b = gk$; so wird $cd = aabb$, und muß noch seyn $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; woraus folget $tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$. Die Sache kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt ein Quadrat machen.

Wir wollen zu diesem Ende die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen was für Zahlen daraus entspringen, wenn für m und n gegebene Zahlen genommen werden, und dabey die Quadraten, so darinnen enthalten sind, besonders bemerken. Weil nun $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, so wollen wir daraus folgendes Täfelgen machen.

Tabelle

Für die Zahlen, welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind.

m	nn	mm − nn	mm + nn	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3. 5
9	1	8	10	16. 5
9	4	5	13	5. 13
16	1	15	17	3. 5. 17
16	9	7	25	25. 7
25	1	24	26	16. 3. 13
25	9	16	34	16. 2. 17
49	1	48	50	25. 16. 2. 3
49	16	33	65	3. 5. 11. 13
64	1	63	65	9. 5. 7. 13
81	49	32	130	64. 5. 13
121	4	117	125	25. 9. 5. 13
121	9	112	130	16. 2. 5. 7. 13
121	49	72	170	144. 5. 17
144	25	119	169	169. 7. 17
169	1	168	170	16. 3. 5. 7. 17
169	81	88	250	25. 16. 5. 11
225	64	161	289	289. 7. 23

Hier-

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nämlich $ff = 9$ und $kk = 4$, so wird $f^4 - k^4 = 13.5$: ferner nehme man $gg = 81$, und $hh = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64.5.13$, woraus $tt = 64.25.169$; folglich $t = 520$. Da nun $tt = 270400$; $f=3$; $g=9$; $k=2$; $h=7$, so bekommen wir $a=21$; $b=18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man $2x = tt + pp + qq = 869314$ und also $x = 434657$; daher ferner $y = x - pp = 420968$; und endlich $z = x - qq = -150568$; welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdenn die Summe in der Differenz und umgekehrt die Differenz in der Summe verwandelt werden; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen.

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

daher wird $x + y = 855625 = (925)^2$
$x + z = 585225 = (765)^2$
$y + z = 571536 = (756)^2$

und weiter $x - y = 13689 = (117)^2$
$x - z = 284089 = (533)^2$
$y - z = 270400 = (520)^2$

Noch andere Zahlen können gefunden werden aus der obigen Tabelle, wenn wir setzen $ff = 9$; $kk = 4$, und $gg = 121$, $hh = 4$; denn daraus wird $tt = 13.5.5.13.9.25. = 9.25.25.169$, also daß $t = 3.5.5.13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$: hieraus wird, $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir $2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, daher $x = \frac{1421729}{2}$,

dar-

daraus $y = x - pp = \frac{107032^{1}}{2}$ und $z = x - qq = 880929$. Nun ist zu merken, daß wenn diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nämliche Eigenschaft behalten müssen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein Genüge leisten: $x = 2843458$, $y = 2040642$, und $z = 1761858$, welche größer sind als die vorhergehenden; also daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236.

XVI. Frage: Man verlangt drey Quadratzahlen, so daß die Differenz zwischen je zweyen ein Quadrat werde?

Die vorige Auflösung dienet uns auch um diese aufzulösen. Denn wenn x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden I. $x + y$; II. $x - y$; III. $x + z$; IV. $x - z$; V. $y + z$; VI. $y - z$; so wird auch das Product aus der ersten und zweyten $xx - yy$ ein Quadrat, imgleichen auch das Product von der dritten und vierten $xx - zz$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $yy - zz$ ein Quadrat seyn, daher die drey hier gesuchten Quadrate seyn werden xx, yy und zz. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweifel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß um $xx - yy$ zu einem Quadrat zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müsse, indem z. E. $25 - 9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen, und zuerst bemerken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Denn wenn $xx - yy$, $xx - zz$ und $yy - zz$ Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wenn sie durch zz

 divi-

dividirt werden; daher diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \square$, $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$, und $\frac{yy}{zz} - 1 = \square$. Also kommt die Sache nur auf diese zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an: nimmt man nun $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$, so werden die zwey leztere Bedingungen erfüllt; denn da wird $\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$ und $\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrat zu machen, welche ist $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1}\right)$. Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, der andere aber $= \frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, wovon das Product ist $\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zehler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig diese Formel zu einem Quadrat zu machen $(ppqq-1)(qq-pp)$, oder auch diese $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp} - 1\right)$; welches geschieht wenn genommen wird $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ und $\frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk}$, da denn ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird.

Hier-

Hieraus ist nun $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{hh+kk}{2hk}$; folglich müssen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat ausmachen, und also auch wenn dieselben mit 4 ff gg. hh kk multiplicirt werden, das ist $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; welche Formel derjenigen, so im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wenn man setzt $f = a+b$, $g = a-b$, $h = c+d$ und $k = c-d$: denn da kommt $2(a^4 - b^4) . 2(c^4 - d^4) = 4(a^4 - b^4)(c^4 - d^4)$, welches, wie wir gesehen haben geschieht, wenn $aa = 9$; $bb = 4$, $cc = 81$ und $dd = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$; $g = 1$; $h = 16$ und $k = 2$, und daher $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{64} = \frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt geben $qq = \frac{65.13}{16.5} = \frac{13.13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, daher wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = -\frac{qq+1}{qq-1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man um ganze Zahlen zu bekommen $z = 153$, da wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadratzahlen folgende:

$xx = 485809$: denn da wird $xx - yy = 451584 = (672)^2$
$yy = 34225$; $\qquad yy - zz = 10816 = (104)^2$
$zz = 23409$; $\qquad xx - zz = 462400 = (680)^2$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wenn wir von den in der vorigen Frage gefundenen drey Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns

dazu die obige Tabelle behülflich gewesen. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedienet, um die kleinste Auflösung zu finden: wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nämlich bey der letztern Frage darauf ankommt, daß dieses Product $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$ zu einem Quadrat gemacht werde, weil alsdenn seyn wird $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}$ und $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}$, so setze man $\frac{q}{p}=m$ oder $q=mp$, da denn unsere Formel seyn wird $(mmp^4-1)(mm-1)$, welche offenbar ein Quadrat wird wenn $p=1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wenn wir setzen $p=1+s$, alsdenn aber muß diese Formel ein Quadrat seyn $(mm-1)$. $(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$ und also auch wenn dieselbe durch das Quadrat $(mm-1)^2$ dividirt wird, da denn herauskommt $1+\frac{4mms}{mm-1}+\frac{6mmss}{mm-1}+\frac{4mms^3}{mm-1}+\frac{mms^4}{mm-1}$. Man setze hier der Kürze halber $\frac{mm}{mm-1}=a$, also daß diese Formel $1+4as+6ass+4as^3+as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel davon $1+fs+gss$ deren Quadrat ist $1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4$, und man bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $4a=2f$ oder $f=2a$, und $6a=2g+ff$, folglich $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$, so geben die zwey letzten Glieder diese Gleichung $4a+as=2fg+ggs$, woraus

woraus gefunden wird $s = \frac{4a - 2fg}{gg - d} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a}$, das ist $s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1}$, welcher Bruch durch $a - 1$ abgekürzt giebt $\frac{4(2a-1)}{4aa - 8a + 1}$. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen weil die Zahl m, daraus hernach $a = \frac{mm}{mm - 1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Exempel zu erläutern nöthig ist.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und daher $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$ und hieraus $p = -\frac{27}{23}$, folglich $q = -\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{948}{428}$ und $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4 \cdot \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{25}} = -\frac{260}{11}$, daher $p = -\frac{249}{11}$ und $q = \frac{747}{22}$: woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerkt zu werden, wenn a ein Quadrat ist, wie geschieht wenn $m = \frac{5}{3}$ denn da wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürze halben $a = bb$, also daß unsere Formel seyn wird $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4$: davon sey die Wurzel $1 + 2bbs + bss$, deren Quadrat ist $1 + 4bbs + 2bss + 4b^4ss + 4b^3s^3 + bbs^4$, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch ss dividirt geben $6bb + 4bbs = 2b + 4b^4 + 4b^3s$, daraus $s = \frac{6bb - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4bb} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2bb - 2b}$; welcher Bruch

noch durch $b - 1$ abgekürzt werden kann, da denn kommt $s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b}$ und $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$.

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1 + 2bs + bss$, davon das Quadrat ist $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^3 + bbs^4$, wo sich die ersten und zwey letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs$. Da nun $bb = \frac{25}{16}$ und $b = \frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s = -2$ und $p = -1$, folglich $pp - 1 = 0$: woraus nichts gefunden wird, weil $z = 0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$, wenn $m = \frac{5}{3}$ und daher $a = \frac{25}{16} = bb$, folglich $b = \frac{5}{4}$, so kommt $p = \frac{17}{20}$ und $q = mp = \frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z} = \frac{689}{680}$ und $\frac{y}{z} = \frac{433}{408}$.

238.

XVII. Frage: Man verlangt drey Quadratzahlen xx, yy und zz, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache?

Da nun diese drey Formeln $xx + yy$; $xx + zz$ und $yy + zz$ zu Quadraten gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch zz um die drey folgenden zu erhalten I. $\frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \square$; II. $\frac{xx}{zz} + 1 = \square$; III. $\frac{yy}{zz} + 1 = \square$. Da denn den zwey letzteren ein Genüge geschieht, wenn $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$, hieraus wird die erste Formel $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß,

das

das ist $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$; oder auch mit $ppqq$ multiplicirt $qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = \square$, welches nicht wohl geschehen kann ohne einen Fall zu wissen, da dieselbe ein Quadrat wird: allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, daher man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, wovon wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt $qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = \square$ so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat $(p+1)^2$ theilen lasse; welches geschieht wenn man nimmt $q-1 = p+1$ oder $q = p+2$, da denn seyn wird $q+1 = p+3$, woher unsere Formel wird $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = \square$, welche durch $(p+1)^2$ dividirt ein Quadrat seyn muß, nämlich $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, so in diese Form aufgelöst wird $2p^4 + 8p^3 + 6pp - 4p + 4$. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $2 + fp + gpp$ oder $gpp + fp + 2$, davon das Quadrat ist $ggp^4 + 2fgp^3 + 4gpp + ffpp + 4fp + 4$ wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $-4 = 4f$, oder $f = -1$ und $6 = 4g + 1$, oder $g = \frac{5}{4}$, da denn die ersten Glieder durch p^3 dividirt geben $2p + 8 = ggp + 2fg = \frac{25}{16}p - \frac{5}{2}$, woraus gefunden wird $p = -24$ und $q = -22$; daher wir erhalten $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{575}{48}$ oder

$x = -\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = \frac{483}{44}$ oder

$y = -\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z = 16 . 3 . 11$, so wird $x = 575 . 11$ und $y = 483 . 12$: daher sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:
$x = 6325 = 11 . 23 . 25$, denn hieraus wird
$xx + yy = 23^2 (275^2 + 252^2) = 23^2 . 373^2$.
$y = 5796 = 12 . 21 . 23$, dieses giebt
$xx + zz = 11^2 (575^2 + 48^2) = 11^2 . 577^2$.
$z = 528 = 3 . 11 . 16$, hieraus wird
$yy + zz = 12^2 (483^2 + 44^2) = 12^2 . 485^2$.

II. Man kann noch auf unendlich viel Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. E. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$ oder $q + 1 = 2(p+1)$, das ist $q = 2p + 1$ und $q - 1 = 2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2 (p+1)^2 (p-1)^2 + pp . 4 . (p+1)^2 (4pp) = \square$, welche durch $(p+1)^2$ getheilt, giebt $(2p+1)^2 (p-1)^2 + 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = \square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze daher $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, oder $q - 1 = 2(p+1)$, so wird $q = 2p + 3$ und $q + 1 = 2p + 4$ oder $q + 1 = 2(p+2)$: woher unsere Formel durch $(p+1)^2$ getheilt seyn wird: $(2p+3)^2 (p-1)^2 + 16pp(p+2)^2$, das ist $9 - 6p + 53pp + 68p^3 + 20p^4$; davon sey die Wurzel $3 - p + gpp$, deren Quadrat ist $9 - 6p + 6gpp + pp - 2gp^3 + ggp^4$. Da nehme man nun um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder durch p^3 dividirt geben $20p + 68 = ggp - 2g$ oder $\frac{256}{3} = \frac{496}{9} p$, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{189}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folget.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p-1)$, so wird $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$ und $q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1)$, daher wird unsere

unsere Formel durch $(p-1)^2$ dividirt, seyn $\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2 + \frac{64}{81}pp(2p+1)^2$, welche mit 81 multiplicirt, wird $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9$, wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $20pp - 9p + 3$, davon das Quadrat $400p^4 - 360p^3 + 201pp + 120pp - 54p + 9$ und daher erhält man $472p + 73 = -360p + 201$, daher $p = \frac{2}{13}$ und $q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3}$.

Man kann auch für die obige Wurzel setzen $20pp + 9p - 3$, davon das Quadrat $400p^4 + 360p^3 - 120pp + 81pp - 54p + 9$, mit unserer Formel verglichen giebt $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber zu nichts nützet.

V. Man kann auch machen daß sich unsere Formel sogar durch beyde Quadrate $(p+1)^2$ und $(p-1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q = \frac{pt+1}{p+t}$, da wird $q+1 = \frac{pt+p+t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$ und $q-1 = \frac{pt-p-t+1}{p+t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$, hieraus wird nun unsere Formel durch $(p+1)^2(p-1)^2$ dividirt $= \frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2} + pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$, welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat seyn muß, nämlich $(pt+1)^2(p+t)^2 + pp(t+1)^2(t-1)^2$ oder $ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 + 2ttpp + (tt+1)^2pp + (tt-1)^2pp + 2t(tt+1)p + tt$,

$+tt$, wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $tpp + (tt+1)p - t$, davon das Quadrat $ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 - 2ttpp + (tt+1)^2 pp - 2t(tt+1)p + tt$ mit unserer Formel verglichen giebt:

$2ttp + (tt+1)^2 p + (tt-1)^2 p + 2t(tt+1) = -2ttp + (tt+1)^2 p - 2t(tt+1)$, oder $4ttp + (tt-1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, oder $(tt+1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, das ist $tt+1 = -\frac{4t}{p}$: woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{tt+1}$, hieraus wird $pt+1 = -\frac{3tt+1}{tt+1}$ und $p+t = \frac{t^3-3t}{tt+1}$, folglich $q = -\frac{3tt+1}{t^3-3t}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. E. $t=2$ so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{13}{2}$: woraus wir finden $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = +\frac{39}{80}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44}$ oder $x = \frac{3.13}{4.4.5} z$ und $y = \frac{9.13}{4.11} z$. Man nehme nun $z = 4.\ 4.\ 5.\ 11.$ so wird $x = 3.\ 13.\ 11$ und $y = 4.\ 5.\ 9.\ 13$: also sind die Wurzeln der drey gesuchten Quadraten $x = 3.\ 11.\ 13 = 429$; $y = 4.\ 5.\ 9.\ 13 = 2340$ und $z = 4.\ 4.\ 5.\ 11 = 880$, Welche noch kleiner sind als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$xx + yy = 3^2.\ 13^2\ (121 + 3600) = 3^2.\ 13^2.\ 61^2$;
$xx + zz = 11^2.\ (1521 + 6400) = 11^2.\ 89^2$;
$yy + zz = 20^2.\ (13689 + 1936) = 20^2.\ 125^2$;

VI. Zuletzt bemerken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeglichen Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann: denn wenn

diese

diese Werthe gefunden worden $x = a$, $y = b$, und $z = c$; also daß $aa + bb = \square$, $aa + cc = \square$ und $bb + cc = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten, $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, denn da wird $xx + yy = aabb + bbcc = bb(aa + cc) = \square$ $xx + zz = aabb + aacc = aa(bb + cc) = \square$ $yy + zz = aacc + bbcc = cc(aa + bb) = \square$. Da wir nun eben gefunden $x = a = 3.\ 11.\ 13$; $y = b = 4.\ 5.\ 9.\ 13$. und $z = c = 4.\ 4.\ 5.\ 11$, so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$x = ab = 3.\ 4.\ 5.\ 9.\ 11.\ 13.\ 13.$

$y = bc = 4.\ 4.\ 4.\ 5.\ 5.\ 9.\ 11.\ 13.$

$y = ac = 3.\ 4.\ 4.\ 5.\ 11.\ 11.\ 13.$

welche sich alle drey durch 3. 4. 5. 11. 13 theilen lassen, und also auf folgende Formel gebracht werden $x = 9.\ 13$, $y = 3.\ 4.\ 4.\ 5$ und $z = 4.\ 11$, das ist $x = 117$, $y = 240$, und $y = 44$, welche noch kleiner sind als die vorigen; daher wird aber:

$xx + yy = 71289 = 267^2$.

$xx + zz = 15625 = 125^2$.

$yy + zz = 59536 = 244^2$.

239.

XVIII. Frage: Man verlangt zwey Zahlen x und y, so daß wenn man die eine zum Quadrat der andern addirt ein Quadrat heraus komme, also daß diese zwey Formeln $xx + y$ und $yy + x$ Quadrate seyn sollen?

Wollte man sogleich für die erstere setzen $xx + y = pp$ und daraus herleiten $y = pp - xx$, so würde die andere Formel $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$ wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zugleich für beyde Formeln $xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx$ und $yy + x = (q - y)^2 = qq$

$= qq - 2qy + yy$, woraus wir denn diese zwey Gleichungen erhalten I.) $y + 2px = pp$ und II.) $x + 2qy = qq$, aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nämlich

$$x = \frac{2qpp - qq}{4pq - 1} \text{ und } y = \frac{2pqq - qq}{4pq - 1};$$ wo man p und q nach Belieben annehmen kann. Man setze z. E. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man diese zwey gesuchte Zahlen $x = \frac{15}{23}$ und $y = \frac{32}{23}$, denn daher wird $xx + y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = (\frac{31}{23})^2$ und $yy + x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = (\frac{37}{23})^2$.

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{11}$ und $y = \frac{17}{11}$: weil aber eine Zahl negativ ist, so möchte man diese Auflösung nicht gelten lassen. Man setze $p = 1$ und $q = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{3}{20}$ und $y = \frac{7}{10}$, denn da wird $xx + y = \frac{9}{400} + \frac{7}{10} = \frac{289}{400} = (\frac{17}{20})^2$ und $yy + x = \frac{49}{100} + \frac{3}{20} = \frac{64}{100} = (\frac{8}{10})^2$.

240.

XIX. Frage: Zwey Zahlen zu finden deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadraten ein Biquadrat sey.

Diese Zahlen seyn x und y und weil $xx + yy$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe erstlich zu einem Quadrat, welches geschieht wenn $x = pp - qq$ und $y = 2pq$, da denn wird $xx + yy = (pp + qq)^2$. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $pp + qq$ ein Quadrat seyn, daher setze man ferner $p = rr - ss$ und $q = 2rs$, so wird $pp + qq = (rr + ss)^2$; folglich $xx + yy = (rr + ss)^4$ und also ein Biquadrat; alsdenn aber wird $x = r^4 - 6rrss + s^4$ und $y = 4r^3s - 4rs^3$. Also ist noch übrig, daß diese Formel $x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4$ ein Quadrat werde, man setze davon die Wurzel $rr + 2rs + ss$, und also unsere Formel gleich

diesem

diesem Quadrat $r^4 + 4r^3s + 6rrss + 4rs^3 + s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rss dividirt geben $6r + 4s =$

$- 6r - 4s$ oder $12r + 8s = 0$: also $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$,

oder man kann die Wurzel auch setzen $rr - 2rs + ss$, damit die vierten Glieder wegfallen: da nun das Quadrat hievon ist $r^4 - 4r^3s + 6rrss - 4rs^3 + s^4$, so geben die übrigen Glieder durch rrs dividirt $4r - 6s =$ $- 4r + 6s$, oder $8r = 12s$, folglich $r = \frac{3}{2}s$: wenn nun $r = 3$ und $s = 2$ so würde $x = - 119$ negativ.

Laßt uns ferner setzen $r = \frac{3}{2}s + t$, so wird für unsere Formel:

$rr = \frac{9}{4}ss + 3st + tt$, $r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}sst + \frac{9}{2}stt + t^3$

---

folglich $r^4 = \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4$

$+ 4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3$

$- 6rrss = - \frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt$

$- 4rs^3 = - 6s^4 - 4s^3t$

$+ s^4 = + s^4$; also unsere Formel

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4$

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wenn sie mit 16 multiplicirt wird: da bekommt man diese $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^8 + 16t^4$; hievon setze man die Wurzel $ss + 148st - 4tt$, davon das Quadrat ist $s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$. Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch stt dividirt geben $21896s - 1184t$

$= 408s + 160t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$.

Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$: und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir, $x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761$ und $y = 1061652293520$.

Capitel

Capitel 15.

Auflösung solcher Fragen worzu Cubi erfordert werden.

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir denn Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewisse Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I. Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 =$ Cubo. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$ so bekommen wir $z^3 - 3zz + 3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubicwurzel setzen $z - u$, wovon der Cubus ist $z^3 - 3uzz + 3uuz - u^3$, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u = 1$, die übrigen Glieder aber würden geben $3z = 3uu\ z - u^3 = 3z - 1$, woraus gefunden wird z gleich unendlich, welcher

welcher Werth uns nichts hilft. Man lasse aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung: $-3zz + 3z = -3uzz + 3uuz - u^3$; aus welcher quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde: wir bekommen aber $3uzz - 3zz = 3uuz - 3z - u^3$ das ist $= 3(u-1)zz = 3(uu-1)z - u^3$, oder $zz = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}\right)} \text{ oder}$$

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}}.$$

Die Sache kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde, wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nämlich $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, wovon also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $guu + fu + 3$, wovon das Quadrat ist $ggu^4 + 2fgu^3 + 6guu + 2fu + ffuu + 9$ und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird erstlich $0 = 2f$ das ist $f = 0$, und hernach $6g + ff = -18$, und daher $g = -3$; alsdenn geben die zwey ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u + 12 = ggu + 2fu = 9u$; und daher $u = 1$, welcher Werth zu nichts führet. Wollen wir nun weiter setzen $u = 1 + t$, so wird unsere Formel $-12t - 3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll, welches nicht geschehen kann, wofern t nicht negativ ist. Es sey also $t = -s$, so wird unsere Formel $12s - 3s^4$, welche in dem Fall $s = 1$ ein Quadrat

drat

drat wird, alsdenn aber wäre $t = -1$ und $u = 0$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreifen wie man will, so wird man niemals einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Endzweck führet; woraus man schon ziemlich sicher schließen kann, daß es nicht möglich sey zwey Cubos zu finden, deren Summe ein Cubus wäre, welches aber auch folgender Gestalt bewiesen werden kann.

243.

Lehrsatz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3 - y^3 = x^3$, nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz von zwey Cubis: Es ist also genug die Unmöglichkeit bloß von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum desselben theilen lassen. Wäre z. E. $x = 2a$, und $y = 2b$ so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun u und y keinen gemeinen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Fall müßte z gerade seyn; im andern Fall aber müßte z ungerade seyn. Also sind

sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerade und eine gerade. Wir wollen daher zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyn demnach x und y zwey ungerade Zahlen, so wird sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn. Man setze daher $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß; daher aber wird $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp + 3qq)$: es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(qq + 3pp)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, daher es genug ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp + 3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp + 3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nämlich $\frac{1}{4}p(pp + 3qq)$. Weil nun von den

Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird $pp + 3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich p durch 4 theilen lassen müsse und also $\frac{p}{4}$ eine ganze Zahl sey.

V. Wenn nun dieses Product $\frac{p}{4} \cdot (pp + 3qq)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nämlich $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$, ein Cubus seyn, so nämlich dieselben keinen gemeinen Theiler haben. Denn wenn ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn: wenn dieselben aber einen gemeinen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp + 3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen Theiler, so würden auch diese pp und $pp + 3qq$ eben denselben gemeinen Theiler haben, und also auch dieser ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen Theiler haben, da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben daher zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wenn die Factoren p und $pp + 3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, welches immer

geschieht,

geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt, da denn beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden insbesondere führen muß.

VII. **Erster Fall:** Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns daher $pp + 3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wenn man, wie oben gezeigt worden, setzt $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$. Damit dadurch werde $pp + 3qq = (tt + 3uu)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird, $p = t^3 - 9tuu = t(tt - 9uu)$, und $q = 3ttu - 3u^3 = 3u(tt - uu)$: weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerade, t aber gerade seyn, weil sonst $tt - uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp + 3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden $p = t(tt - 9uu) = t(t + 3u)(t - 3u)$, so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; daher diese Formel $2t(t + 3u)(t - 3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist: also sind diese drey Fa-

ctoren $2t$, $t+3u$ und $t-3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze daher $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$ so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Denn nachdem wir gesetzt haben $x=p+q$ und $y=p-q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wenn es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summe auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir sogleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p=3r$ so wird unsere Formel $\frac{3r}{4}.(9rr+3qq)$, oder $\frac{9}{4}r(3rr+qq)$, welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben sowohl gerade seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q=t(tt-9uu)$ und $r=3u(tt-uu)$: wo zu

merken,

merken, daß weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl seyn müsse.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu) = 2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte: wenn man aber setzt $t+u = f^3$ und $t-u = g^3$, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre: denn man darf nur setzen $f^3 - g^3 = h^3$, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

244.

Weil es nun nicht möglich ist zwey solche Cubos zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fällt auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit dieser Frage zu machen, wie drey Cubi gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache: man kann aber zwey von denselben nach Belieben annehmen, also daß nur der

dritte gefunden werden soll; welche Frage wir anjetzo vornehmen wollen.

245.

II. Frage: Es wird zu zwey gegebenen Cubis a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubum ausmache?

Es soll also diese Formel $a^3 + b^3 + x^3$ ein Cubus werden, welches da es nicht anders geschehen kann, als wenn schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall aber hier sich von selbst darbiethet nämlich $x = -a$, so setze man $x = y - a$, da wird $x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3$, und daher unsere Formel die ein Cubus werden soll $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$, wovon das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, daher man sogleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y + b$, deren Cubus ist $y^3 + 3byy + 3bby + b^3$; woraus wir bekommen $-3ay + 3aa = 3by + 3bb$, daher $y = \frac{aa - bb}{a + b} = a - b$; folglich $x = -b$ welcher uns zu nichts dienet.

II. Man kann aber die Wurzel auch setzen $b + fy$, davon der Cubus ist $f^3y^3 + 3bffyy + 3bbfy + b^3$; und f also bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $3aa = 3bbf$ oder $f = \frac{aa}{bb}$, da denn die zwey ersten Glieder durch yy dividirt geben $y - 3a = f^3y + 3bff = \frac{a^6y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^3}$, welche mit b^6 multiplicirt giebt $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^4b^3$;

daraus

daraus gefunden wird $y = \frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6 - a^6}$ $= \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}$ und also $x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a.\frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}$.

Wenn also die beyden Cubi a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubi gefunden, und damit dieselbe positiv werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubum annehmen, welches wir durch einige Exempel erläutern wollen.

I. Es seyn die zwey gegebenen Cubi 1 und 8, also daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird diese Form $9 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{17}{7}$; denn da wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es seyn die zwey gegebenen Cubi 8 und 27, also daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird diese Form $35 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyn die zwey gegebenen Cubi 27 und 64, also daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird diese Form $91 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubis noch mehr dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$, da man denn wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in allzuweitläuftige Rechnungen führen würde.

246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merkwürdiger Fall, wenn die beyden gegebenen Cubi einander gleich sind, oder $b = a$: denn da bekommen wir $x = \frac{3a^4}{0}$ das ist unendlich, und erhalten also keine Auf-

 lösung:

lösung: daher diese Frage wenn $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelöst werden können. Es sey z. E. $a=1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu merken, daß was man auch immer vor Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergebens sind, und nimmer daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann; woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubo kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubum ausmachte, oder daß diese Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folget diese $2a^3 = y^3 - x^3$, und daher auch nicht möglich ist zwey Cubos zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen, und folgender Gestalt bewiesen werden kann.

247.

Lehrsatz. Weder die Summe, noch die Differenz zwischen zwey Cubis kann jemals einem doppelten Cubo gleich werden, oder diese Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer dem Fall $y = x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar seyn, und also die ganze Gleichung durch den Cubum davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müssen beyde Zahlen x und y ungerade seyn, daher sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn wird. Man setze also $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$; da denn

von

von den Zahlen p und q die eine gerade die andere aber ungerade seyn muß. Hieraus folgt aber $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp + 3qq)$, und $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(3pp + qq)$, welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Daher es genug seyn wird zu zeigen, daß diese Formel $2p(pp + 3qq)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p(pp + 3qq)$ kein Cubus seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwey Fälle zu betrachten vor, davon der erste ist, wenn die zwey Factoren p und $pp + 3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, da denn ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinen Theiler haben, welcher wie wir oben gesehen kein anderer seyn kann als 3.

II. Erster Fall. Es sey demnach p nicht theilbar durch 3, und also die beyden Factores unter sich untheilbar, so mache man erstlich $pp + 3qq$ zu einem Cubo, welches geschieht, wenn $p = t(tt - 9uu)$ und $q = 3u(tt - uu)$, also daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonst p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind diese zwey Factoren t und $tt - 9uu$ untheilbar unter sich, und muß folglich ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factores, nämlich $t + 3u$ und $t - 3u$, welche unter sich untheilbar sind, erstlich weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber weil von den Zahlen t und u die eine gerade und die andere ungerade ist. Denn wenn beyde ungerade wären, so würde nicht nur p sondern auch q ungerade werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder

der von diesen Factoren $t + 3u$ und $t - 3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus, welcher sey $= h^3$, also daß $f^3 + g^3 = 2h^3$ wäre, das ist wir hätten zwey weit kleinere Cubos nämlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p = 3r$, so wird unsere Formel $3r(9rr + 3qq) = 9r(3rr + qq)$, welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und daher ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letzteren $qq + 3rr$ zu einem Cubo zu machen, so setze man $q = t(tt - 9uu)$ und $r = 3u(tt - uu)$, da denn wieder von den Zahlen t und u die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß, weil sonst die beyde Zahlen q und r gerade würden. Hieraus aber bekommen wir den erstern Factor $9r = 27u(tt - uu)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nämlich $u(tt - uu)$ das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man demnach für die beyden letztern $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so bekommt man $2u = f^3 - g^3$: weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahzwey Cubos f^3 und g^3, deren Differenz gleichfalls ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubos giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man

IX. Man könnte zwar einwenden, daß da es in kleinern Zahlen gleichwohl einen solchen Fall gebe, nämlich wenn $f = g$, der obige Schluß betriegen könnte. Allein wenn $f = g$ wäre, so hätte man in dem erstern Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$, und da wir gesetzt hatten $x = p + q$ und $y = p - q$, so wären auch die zwey ersten Cubi x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden. Eben so auch in dem andern Fall, wenn $f = g$ wäre, so müßte seyn $t + u = t - u$ und also wiederum $u = 0$, daher auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, da denn wiederum die beyden erstern Cubi x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keineswegs die Frage ist.

248.

III. Frage: Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubos x^3, y^3, und z^3, deren Summe wiederum einen Cubum ausmache?

Wir haben schon gesehen, daß man zwey von diesen Cubis für bekannt annehmen, und daraus immer den dritten bestimmen könne, wenn nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubum und es würde sehr schwer fallen, daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drey Cubos als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir bekommen $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$; welcher Gleichung folgender Gestalt ein Genügen geschehen kann.

I. Man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so wird, wie wir gesehen $x^3 + y^3 = 2p(pp + 3qq)$: ferner setze man $v = r + s$ und $z = r - s$, so wird

$v^3 -$

$v^3 - z^3 = 2s(ss + 3rr)$; daher denn seyn muß
$2p(pp + 3qq) = 2s(ss + 3rr)$, oder
$p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$.

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $pp + 3qq$ keine andere Theiler habe, als welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun diese beyde Formeln $pp + 3qq$ und $ss + 3rr$ nothwendig einen gemeinen Theiler haben müssen, so sey derselbe $= tt + 3uu$.

III. Zu diesem Ende setze man
$pp + 3qq = (ff + 3gg)(tt + 3uu)$ und
$ss + 3rr = (hh + 3kk)(tt + 3uu)$: da denn
$p = ft + 3gu$ und $q = gt - fu$ wird:
folglich $pp = fftt + 6fgtu + 9gguu$ und
$qq = ggtt - 2fgtu + ffuu$; hieraus
$pp + 3qq = (ff + 3gg)tt + (3ff + 9gg)uu$ das ist $pp + 3qq = (ff + 3gg)(tt + 3uu)$.

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel
$s = ht + 3ku$ und $r = kt - hu$,
woraus diese Gleichung entspringt
$(ft + 3gu)(ff + 3gg)(tt + 3uu) =$
$(ht + 3ku)(hh + 3kk)(tt + 3uu)$,
welche durch $tt + 3uu$ dividirt giebt $ft(ff + 3gg) + 3gu(ff + 3gg) = ht(hh + 3kk) + 3ku(hh + 3kk)$, oder $ft(ff + 3gg) - ht(hh + 3kk) = 3ku(hh + 3kk) - 3gu(ff + 3gg)$, woraus wir erhalten $t = \frac{3k(hh + 3kk) - 3g(ff + 3gg)}{f(ff + gg) - h(hh + 3kk)} u$.

V. Um nun ganze Zahlen zu bekommen, so nehme man $u = f(ff + 3gg) - h(hh + 3kk)$, damit sey $t = 3k(hh + 3kk) - 3g(ff + 3gg)$, wo man die vier Buchstaben f, g, h, und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus:

I.) p.

I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$, und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$, und $v = r + s$, welche Auflösung so allgemein ist, daß darinnen alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser ganzen Rechnung keine willkührliche Einschränkung gemacht worden.

Der ganze Kunstgriff bestehet darinn, daß unsere Gleichung durch $tt + 3uu$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich vielerley Art angestellet werden, wovon wir einige Exempel anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird $t = -3g(ff + 3gg)$ und $u = s(ff + 3gg) - 1$; hieraus also $p = -3fg(ff + 3gg) + 3fg(ff + 3gg) - 3g = -3g$, $q = -(ff + 3gg)^2 + f$, ferner $s = -3g(ff + 3gg)$ und $r = -f(ff + 3gg) + 1$, woraus wir endlich bekommen $x = -3g - (ff + 3gg)^2 + f$, $y = -3g + (ff + 3gg)^2 - f$, $z = (3g - f)(ff + 3gg) + 1$ und endlich $v = -(3g + f)(ff + 3gg) + 1$. Laßt uns nun setzen $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ und $v = -7$; daher haben wir diese Gleichung $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$ oder $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Es sey $f = 2$, $g = 1$ und also $ff + 3gg = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $hh + 3kk = 3$, so wird seyn $t = -12$ und $u = 14$: hieraus wird $p = 2t + 3u = 18$, $q = t - 2u = -40$, $r = t = -12$ und $s = 3u = 42$; daher wir bekommen $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$, $z = r - s = -54$ und $v = r + s = 30$; also daß $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, oder

oder $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$. Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen lassen, so wird auch seyn $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$.

III. Es sey $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also $ff + 3gg = 12$ und $hh + 3kk = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen lassen; und da es hier nur auf ihre Verhältnisse ankommt, so wollen wir setzen $t = -3$ und $u = 4$. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$, $q = t - 3u = -15$, $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$: hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, also daß $-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3$ oder $18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3$: oder auch durch 2 abgekürzt $9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$.

IV. Laßt uns setzen $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $ff + 3gg = ff$ und $hh + 3kk = 4hh$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = st = 12fh^3$, $q = -f^4 + 4fh^3$, $r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ und $s = 3hf^3$, daraus endlich $x = p + q = 16fh^3 - f^4$, $y = p - q = 8fh^3 + f^4$, $z = r - s = 16h^4 - 4hf^3$, und $v = r + s = 16h^4 + 2hf^3$. Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$, und $v = 18$, welche durch 3 abgekürzt geben $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$, und $v = 6$, also daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Hierbey ist merkwürdig, daß diese drey Wurzeln 3, 4, 5, um Eins steigen, daher wir untersuchen wollen, ob es noch mehr dergleichen gebe?

249.

IV. Frage: Man verlangt drey Zahlen in einer Arithmetischen Progression, deren Differenz = 1, also daß die Cubi derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubum hervorbringen?

Es

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $=x-1$ und die größere $=x+1$: die Cubi derselben addirt geben nun $3x^3+6x=3x(xx+2)$, welches ein Cubus seyn soll. Hierzu ist nun nöthig, daß ein Fall bekannt sey, wo dieses geschieht, und nach einigem probiren findet man $x=4$, daher setzen wir nach den oben gegebenen Regeln $x=4+y$, so wird $xx=16+8y+yy$ und $x^3=64+48y+12yy+y^3$, woraus unsere Formel wird $216+150y+36yy+3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze demnach die Wurzel $6+fy$ und mache daß die beyden ersten Glieder wegfallen: da nun der Cubus davon ist $216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, so muß seyn $150=108f$, also $f=\frac{25}{18}$. Die übrigen Glieder aber durch yy dividirt geben $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18^2}+\frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3.36+18^3.3y=18^2.25^2+25^3y$ oder $18^3.36-18^2.25^2=25^3y-18^3.3y$, daher $y=\frac{18^3.36-18^2.25^2}{25^3-3.18^3}$ $=\frac{18^2(18.36-25^2)}{25^3-3.18^2}$, und also $y=-\frac{324.23}{1871}=-\frac{7452}{1871}$; folglich $x=\frac{32}{1871}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte diese Reduction zu einem Cubo weiter zu verfolgen, so ist zu merken, daß die Frage immer könne auf Quadrate gebracht werden. Denn da $3x(xx+2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $=x^3y^3$, da man denn erhält $3xx+6=xxy^3$ und also $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3-18$ zu einem Quadrat zu machen; wozu wiederum nöthig ist einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen

lassen,

fassen. Man setze deswegen $y=3z$, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$, welcher durch 9 dividirt, nämlich $18z^3$ 2, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar wenn $z=1$; man setze daher $z=1+v$, so muß seyn $16+54v+54vv+18v^3=\square$. Davon setze man die Wurzel $4+\frac{27}{4}v$, deren Quadrat ist $16+54v+\frac{729}{16}vv$, und also $54+18v=\frac{729}{16}$: oder $18v=-\frac{135}{16}$, folglich $2v=-\frac{15}{16}$, und $v=-\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z=1+v=\frac{17}{32}$: ferner $y=\frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrach:en, welcher war $6y^3-18=162z^3-18=9(18z^3-2)$. Von diesem Factor aber $18z^3-2$. haben wir die Quadratwurzel $4+\frac{27}{4}v=\frac{107}{128}$, also die Quadratwurzel aus dem ganzen Nenner ist $\frac{321}{128}$: aus dem Zähler aber ist derselbe $= 6$, woraus folget $x=\frac{6}{\frac{321}{128}}=\frac{256}{107}$, welcher Werth von dem vorher gef.ındenen ganz unterschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubis folgende: I.) $x-1=\frac{149}{107}$; II.) $x=\frac{256}{107}$; III.) $x+1=\frac{363}{107}$, deren Cubi zusammen ıddirt einen Cubum hervorbringen, davon die Wurzel seyn wird $xy=\frac{256}{107}\cdot\frac{51}{32}=\frac{408}{107}$.

250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytic beschließen, weil wir bey den angebrachten Fragen Gelegenheit genug gefunden haben die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in dieser Wissenschaft sind gebraucht worden.

Ende des zweyten Theils.

